



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava**



# **TEORIE OBVODŮ I**

**učební text**

**Jaromír Kijonka a kolektiv**

**Ostrava 2012**

Recenze: Prof. Ing. Josef Paleček, CSc.  
Mgr. Tomáš Fismol

Název: Teorie obvodů I  
Autor: Jaromír Kijonka a kolektiv  
Vydání: první, 2010  
Počet stran: 135  
Náklad: 20

Studijní materiály pro studijní obor Projektování elektrických zařízení, Měřicí a řídicí technika, Aplikovaná a komerční elektronika, Biomedicínský technik, Elektroenergetika a Mechatronika Fakulty elektrotechniky a informatiky  
Jazyková korektura: nebyla provedena.

**Určeno pro projekt:**

Operační program Vzděláváním pro konkurenceschopnost

Název: Personalizace výuky prostřednictvím e-learningu

Číslo: CZ.1.07/2.2.00/07.0339

Realizace: VŠB – Technická univerzita Ostrava

Projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu ČR

© Jaromír Kijonka

© VŠB – Technická univerzita Ostrava

**ISBN 978-80-248-2597-7**

## **OBSAH:**

|                                                                                           |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1. MODEL PERIODICKÉ VELIČINY .....</b>                                                 | <b>7</b>   |
| <b>2. TVARY FOURIEROVY ŘADY .....</b>                                                     | <b>22</b>  |
| <b>3. VYJÁDŘENÍ PERIODICKÉ VELIČINY SOUČTEM STŘÍDAVÉ A<br/>STEJNOSMĚRNÉ SLOŽKY .....</b>  | <b>37</b>  |
| <b>4. VYJÁDŘENÍ STEJNOSMĚRNÉ SLOŽKY SOUČTEM ZÁKLADNÍ<br/>HARMONICKÉ A ZKRESLENÍ .....</b> | <b>44</b>  |
| <b>5. FYZIKÁLNÍ MODEL KONDENZÁTORU .....</b>                                              | <b>50</b>  |
| <b>6. POPIS ZDROJŮ .....</b>                                                              | <b>55</b>  |
| <b>7. POPIS GENERÁTORŮ .....</b>                                                          | <b>60</b>  |
| <b>8. DĚLIČE .....</b>                                                                    | <b>66</b>  |
| <b>9. ELEMENTÁRNÍ METODY .....</b>                                                        | <b>73</b>  |
| <b>10. OBECNÁ METODA .....</b>                                                            | <b>80</b>  |
| <b>11. PRINCIPY .....</b>                                                                 | <b>84</b>  |
| <b>12. ROVNOCENNOST (EKVIVALENCE) GENERÁTORŮ .....</b>                                    | <b>93</b>  |
| <b>13. HARMONICKÁ OBVODOVÁ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE ..</b>                                 | <b>98</b>  |
| <b>14. NEHARMONICKÁ OBVODOVÁ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE ..</b>                               | <b>103</b> |
| <b>15. OBECNÁ OBVODOVÁ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE .....</b>                                  | <b>112</b> |
| <b>16. ANALÝZA ELEMENTÁRNÍCH OBVODŮ PŘI STŘÍDAVÉM<br/>NEHARMONICKÉM NAPÁJENÍ .....</b>    | <b>117</b> |
| <b>17. ŠÍŘKA PÁSMA .....</b>                                                              | <b>124</b> |
| <b>18. EXTRÉMY NAPĚTÍ INDUKTORU A KAPACITORU V SÉRIOVÉM<br/>REZONANČNÍM OBVODU .....</b>  | <b>129</b> |

## POKYNY KE STUDIU

### Název předmětu

Pro předmět Teorie obvodů I 1. semestru oboru Projektování elektrických zařízení, Měřicí a řídicí technika, Aplikovaná a komerční elektronika, Biomedicínský technik, Elektroenergetika a Mechatronika studijních programů Projektování elektrických zařízení, Elektrotechnika a Mechatronika jste obdrželi studijní balík obsahující

- integrované skriptum pro distanční studium obsahující i pokyny ke studiu
- CD-ROM s doplňkovými animacemi vybraných částí kapitol
- harmonogram průběhu semestru a rozvrh prezenční části
- rozdělení studentů do skupin k jednotlivým tutorům a kontakty na tutorý
- kontakt na studijní oddělení

### Prerekvizity

Nemá.

### Cílem předmětu

Teorie obvodů I je naučit studenty tvůrčím způsobem aplikovat fyzikální zákony a principy při analýze elementárních jevů ve stejnosměrných a střídavých elektrických obvodech s lineárními a nelineárními prvky. Poznatky z teorie obvodů patří mezi základní znalosti, které student uplatní v celém průběhu studia. Po absolvování výuky předmětu Teorie obvodů I umí student vypočítat napětí a proudy kdekoli v obvodu a na jejich základě posuzovat vlastnosti elektrických zařízení.

Předmět je možné studovat jak v prezenční, tak i kombinované formě bakalářského studijního programu Elektrotechnika, Mechatronika a Projektování elektrických zařízení. Odborný obsah studia předmětu Teorie obvodů I je shodný pro obě formy studia.

### Pro koho je předmět určen

Modul je zařazen do bakalářského studia oborů Projektování elektrických zařízení, Měřicí a řídicí technika, Aplikovaná a komerční elektronika, Biomedicínský technik, Elektroenergetika a Mechatronika studijních programů Projektování elektrických zařízení, Elektrotechnika a Mechatronika, ale může jej studovat i zájemce z kteréhokoliv jiného oboru.

V prezenční formě studia je výuka zajištěna dvěma hodinami přednášek, dvěma hodinami výpočetních cvičení a dvěma hodinami laboratorních cvičení týdně ve 14-ti týdenním semestru, tedy celkem 84 hodinami. Laboratorní cvičení vedou dva pedagogové. Prezenční forma studia se liší od kombinované počtem měřených laboratorních úloh. Kombinovaná forma studia je tvořena sedmi tutoriály, z nichž dva zahrnují laboratorní cvičení a je určena studentům, kteří jsou schopni samostatně studovat a mají dostatečnou motivaci a odpovědnost za svůj vzdělávací postup.

Skriptum se dělí na části, kapitoly, které odpovídají logickému dělení studované látky, ale nejsou stejně obsáhlé. Předpokládaná doba ke studiu kapitoly se může výrazně lišit, proto jsou velké kapitoly děleny dále na číslované podkapitoly a těm odpovídá níže popsaná struktura.

**Při studiu každé kapitoly doporučujeme následující postup:**



**Čas ke studiu:** xx hodin

Na úvod kapitoly je uveden **čas** potřebný k prostudování látky. Čas je orientační a může vám sloužit jako hrubé vodítko pro rozvržení studia celého předmětu či kapitoly. Někomu se čas může zdát příliš dlouhý, někomu naopak. Jsou studenti, kteří se s touto problematikou ještě nikdy nesetkali a naopak takoví, kteří již v tomto oboru mají bohaté zkušenosti.



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat ...
- definovat ...
- vyřešit ...

Ihned potom jsou uvedeny cíle, kterých máte dosáhnout po prostudování této kapitoly – konkrétní dovednosti, znalosti.



**VÝKLAD**

Následuje vlastní výklad studované látky, zavedení nových pojmů, jejich vysvětlení, vše doprovázeno obrázky, tabulkami, řešenými příklady, odkazy na animace.



**SHRNUTÍ POJMŮ 1.1.**

Na závěr kapitoly jsou zopakovány hlavní pojmy, které si v ní máte osvojit. Pokud některému z nich ještě nerozumíte, vraťte se k nim ještě jednou.



**OTÁZKY 1.1.**

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.



**ÚLOHY K ŘEŠENÍ 1.1.**

Protože většina teoretických pojmů tohoto předmětu má bezprostřední význam a využití v databázové praxi, jsou Vám nakonec předkládány i praktické úlohy k řešení. V nich je

hlavní význam předmětu a schopnost aplikovat čerstvě nabyté znalosti při řešení reálných situací hlavním cílem předmětu.



## **KLÍČ K ŘEŠENÍ**

Výsledky zadaných příkladů i teoretických otázek výše jsou uvedeny v závěru učebnice v Klíči k řešení. Používejte je až po vlastním vyřešení úloh, jen tak si samokontrolou ověříte, že jste obsah kapitoly skutečně úplně zvládli.

Úspěšné a příjemné studium s touto učebnicí Vám přeje autor výukového materiálu

Jaromír Kijonka

## 1. MODEL Y PERIODICKÉ VELIČINY



**Čas ke studiu:** 3 hodiny



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat periodickou veličinu
- analyzovat efektivní hodnotu
- navrhnout jednotkovou funkci

### 1.1. Periodická veličina



#### VÝKLAD

Zdrojem informací o fyzikální veličině jsou její okamžité hodnoty, které popisujeme v analytické matematice funkcí a v numerické matematice posloupností hodnot. Okamžité hodnoty můžeme rozdělit na neperiodické (nebudeme se jimi v této kapitole zabývat) a periodické.

Periodická veličina je časová funkce  $v(t)$ , která vykazuje stejné průběhy po době periody  $T$  a jejich celočíselných násobcích  $cT$ . Matematicky je definována výrazem

$$v(t) = v(t + cT).$$

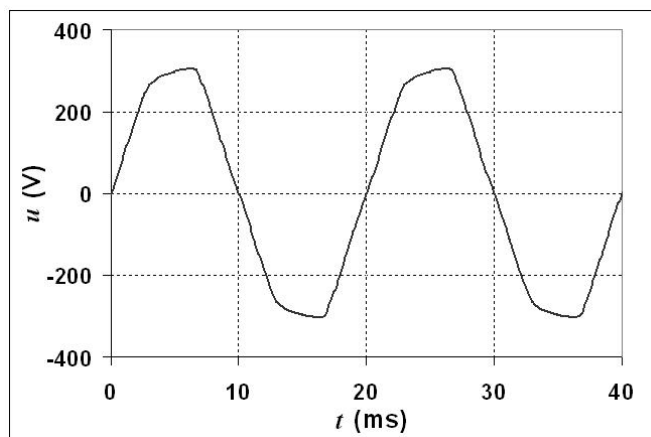
Zobrazujeme ji grafem na libovolném intervalu

$$J \in \langle a, b \rangle$$

alespoň rovnajícím se době periody

$$J \geq T.$$

Periodickými veličinami  $v$  popisujeme v elektrotechnice průběhy proudů a napětí v ustálených jevech. V elektrárnách alternátory generují harmonické průběhy napětí, ale vlivem zpětného působení spotřebičů dochází ke zkreslení napětí v distribučních sítích, např. obr. 1.1.



**Obr. 1.1** Zkreslený průběh napětí sítě v laboratoři F326.

### □ Perioda

Perioda vymezuje interval, po kterém se opakují okamžité hodnoty veličiny. V praxi zobrazíme průběh veličiny, který expertně posoudíme očima a rozhodneme, zda ho můžeme považovat za periodický.

#### **Příklad 1.1.**

*Odečtěte z obr. 1 hodnotu periody napětí.*



**Řešení:** Periodu opakování nejlépe určíme z průchodu okamžitých hodnot nulou. Ze zobrazeného intervalu je zřejmé, že  $T = 20 \text{ ms}$ .

### □ Kmitočet (frekvence)

Kmitočet vymezuje četnost (počet opakování) period za jednu sekundu. Označujeme ho písmenem  $f$  a jeho hodnotu určíme pouze ze známé hodnoty periody z výrazu  $f = T^{-1}$ . Jednotkou kmitočtu je Hertz (Hz).

#### **Příklad 1.2.**

*Vypočítejte hodnotu kmitočtu napětí v obr. 1.1.*



**Řešení:** Hodnotu kmitočtu určíme ze známé hodnoty periody z výrazu

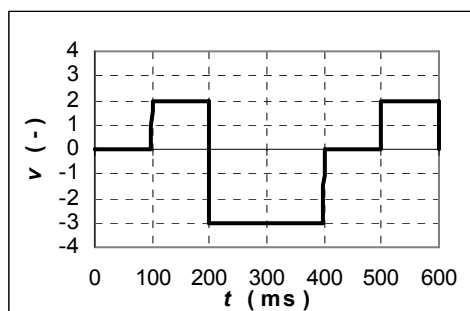
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} = 50 \text{ Hz}$$

### □ Nejmenší a největší okamžitá hodnota

Okamžité veličiny periodické veličiny charakterizujeme kromě periody, resp. kmitočtu, i nejmenší (minimální) a největší (maximální) okamžitou hodnotou, které označujeme symboly  $V_{\min}$ ,  $V_{\max}$ .

**Příklad 1.3.**

Odečtěte minimální a maximální okamžitou hodnotu veličiny v obr. 1.2.



**Obr. 1.2** Okamžité hodnoty veličiny.



**Řešení:** Z obr. 1.2 jednoznačně odečteme nejmenší okamžitou hodnotu veličiny  $V_{\min} = -3$  a největší okamžitou hodnotu veličiny  $V_{\max} = 2$ .

□ **Amplituda**

Pokud je stejná absolutní hodnota nejmenší a největší okamžité hodnoty periodické veličiny nazýváme ji amplitudou a označujeme symbolem  $V_m$ . Periodický průběh pak charakterizujeme amplitudou.

**Příklad 1.4.**

Posuďte expertně očima, zda můžeme s dostatečnou přesností charakterizovat průběh napětí v obr. 1.1 amplitudou.



**Řešení:** Z expertního posouzení očima průběhu v obr. 1 můžeme usoudit, že absolutní hodnota nejmenší okamžité hodnoty napětí je stejná jako absolutní hodnota největší okamžité hodnoty napětí, proto lze s dostatečnou přesností charakterizovat zobrazený průběh amplitudou. Její hodnota je asi  $V_m \doteq 300 \text{ V}$ .



### Shrnutí pojmů 1.1.

Periodické průběhy jsou charakteristické opakováním okamžitých hodnot po době periody. Periodický průběh charakterizujeme dobou periody, kmitočtem, minimální a maximální okamžitou hodnotou respektive amplitudou.

Poznámka: Pro lepší čitelnost zápisů často okamžité hodnoty periodické veličiny reprezentujeme pouze písmenem malé abecedy a neuvádíme explicitně její závislost na čase, tj.

$$v(t) = (t + cT) = v.$$



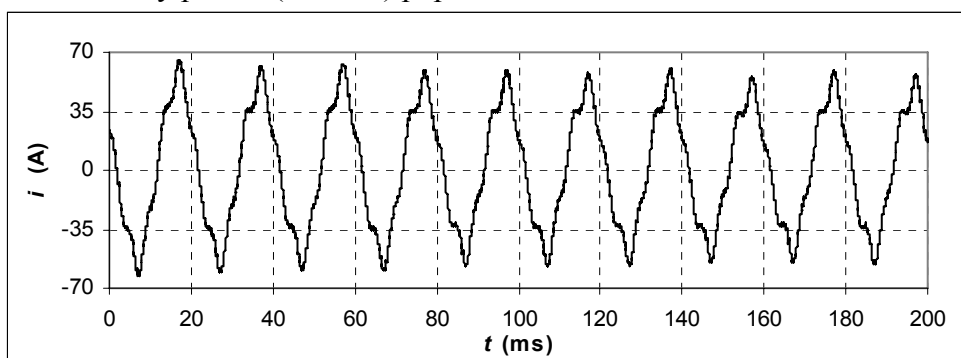
### Otázky 1.1.

1. Vymezte, jakým způsobem v praxi rozhodujeme, zda můžeme průběh považovat za periodický.
2. Napište analytický výraz pro zápis periodického průběhu veličiny.
3. Vymezte způsob stanovení hodnoty periody.
4. Napište vztah mezi hodnotou periody a kmitočtu.
5. Uveďte, kterými hodnotami charakterizujeme okamžité hodnoty periodické veličiny.
6. Uveďte podmínku, při které nazýváme největší a nejmenší okamžitou hodnotu periodické veličiny amplitudou.



### Úlohy k řešení 1.1.

1. Rozhodněte, zda průběh proudu změřený na intervalu 0 až 200 ms (obr. 1.3) můžeme matematicky přesně (exaktně) popsat rovnicí  $v(t) = (t + cT)$ .



**Obr.1 3** Okamžité hodnoty proudu na časovém intervalu 0 až 200 ms.

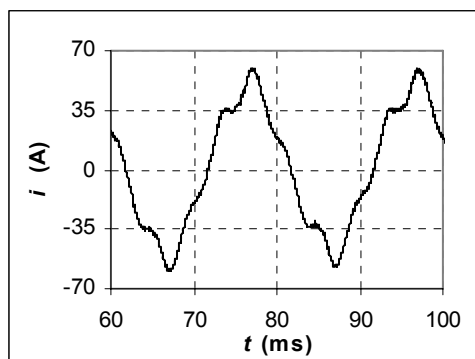
2. Vymezte interval, na kterém zobrazený průběh proudu (obr. 1.3) můžeme považovat s nejmenší nedokonalostí za periodický.
3. Rozhodněte, zda zobrazený průběh proudu (obr. 1.3) můžeme považovat v praxi s dostatečnou přesností za periodický.
4. Rozhodněte, zda okamžité hodnoty veličiny v obr. 1.2 vyhovují periodické funkci.
5. Stanovte hodnotu periody okamžitých hodnot veličiny v obr. 1.2.
6. Vypočítejte hodnotu kmitočtu veličiny v obr. 1.2.



### KLÍČ K ŘEŠENÍ

1. Okamžité hodnoty proudu v obr. 1.3 zobrazené na intervalu 200 ms exaktně nevyhovují rovnici definující periodickou funkci.

2. Může vybrat kratší interval, nejlépe trvající 40 ms, např. 60 až 100 ms (obr. 1.4), nebo jiný vhodný.



**Obr. 1.4** Okamžité hodnoty proudu  
na časovém intervalu 60 až 100 ms.

3. V praxi můžeme považovat s dostatečnou přesností průběh proudu (obr. 1.3) za periodický.
4. Okamžité hodnoty veličiny v obr. 1.2 vyhovují periodické funkci.
5.  $T = 400$  ms.
6.  $f = 2,5$  Hz.

## 1.2. Popis periodické veličiny v numerické matematice



### VÝKLAD

Analytickými funkcemi popisujeme v praxi periodické veličiny velmi obtížně a navíc často velmi nedokonale. Proto k záznamu a následnému zpracování používáme velmi účinně metod numerické matematiky v prostředí tabulkových procesorů, kde okamžité hodnoty veličin popisujeme posloupností hodnot.

Moderní aparatury s měřicími kartami snímají veličiny čidly proudu a napětí, analogově digitálními převodníky je vzorkují počtem vzorků  $n$  vzorkovací rychlosti několik desítek tisíc až miliónů vzorků za sekundu, kvantují je až do  $2^{20} = 262\,156$  úrovní, vzorkované úrovně kódují jednotkovými funkcemi na digitální signály, které jsou vyčítány speciálními programy a ukládány na HDD PC. Uložena data pak zpracováváme tabulkovým procesorem metodami numerické matematiky. Periodickou funkci v numerické matematice zapisujeme rovnicí

$$v(n) = v(n + cN),$$

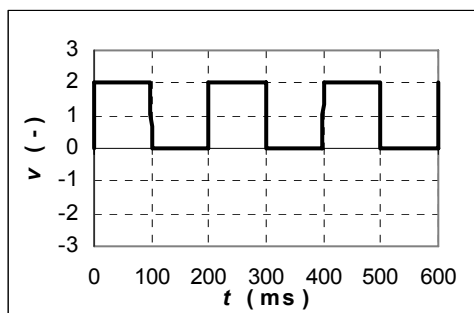
kde  $n$  je pořadí vzorku a  $N$  perioda (počet vzorků na periodu).

**Příklad 1.5.**

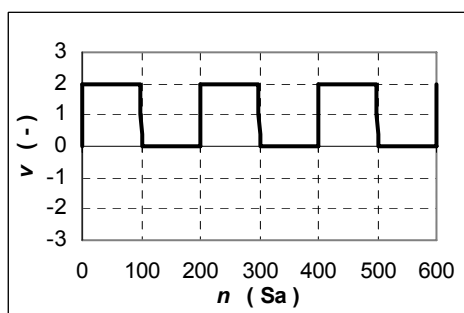
Zobrazte periodický průběh posloupností hodnot (v závislosti na počtu vzorků), byl-li periodický průběh v závislosti na čase vzorkován rychlostí 1000 vzorků za sekundu, tj.  $1 \text{ kSa s}^{-1}$ .



**Řešení:** Zobrazení periodického průběhu v závislosti na čase (obr. 1.5a)) posloupností hodnot je prezentován v obr. 1.5b).



**Obr. 1.5. a)** Periodický průběh v závislosti na čase.



**Obr. 1.5. b)** Periodický průběh v závislosti na počtu vzorků.

**Shrnutí pojmů 1.2.**

Bez popisu jevů analytickými funkcemi a lépe posloupnostmi hodnot bychom nemohli jevy poznávat, analyzovat, posuzovat, projektovat a zobecňovat. Praktickou realizaci toho kardinálního záměru lze nejúčinněji dosáhnout použitím nástroje, který nazýváme tabulkový procesor. Ve většině případů je numerické zpracování dat mnohem efektivnější a dokonalejší než pomocí analytických funkcí.

**Otázky 1.2**

1. Uveďte, jaké matematické metody používáme pro popis periodických veličin.
2. Popište způsob získání posloupností hodnot, kterými reprezentujeme okamžité hodnoty periodických veličin.
3. Napište rovnici periodické veličiny v numerické matematice.

**Úlohy k řešení 1.2.**

1. Stanovte minimální a maximální okamžitou hodnotu veličiny v obr. 1.5.
2. Rozhodněte, zda je možné považovat minimální a maximální okamžitou hodnotu veličiny v obr. 1.1 za amplitudu.
3. Vymezte hodnotu periody zobrazené v obr. 1.5a) a obr. 1.5b).
4. Určete počet zobrazených period okamžitých hodnot periodické veličiny v obr. 1.5.



## KLÍČ K ŘEŠENÍ

1.  $V_{\min} = 0$ ,  $V_{\max} = 2$ .
2. Protože absolutní hodnoty minima a maxima veličiny v obr. 1.5 nejsou stejné nelze je považovat za amplitudu.
3. Hodnota periody v obr. 1.5a)  $T = 200 \text{ ms}$ , v obr.1.5b)  $N = 200 \text{ Sa}$ .
4. V obr. 1.5 jsou zobrazeny tři periody veličiny.

## 1.3. Syntéza jednotkových funkcí



### VÝKLAD

Pro numerické zpracování periodických veličin má nezastupitelný význam neperiodická funkce nazývaná jednotkový skok  $1(t)$  - jednotková (Heavisideova) funkce.

#### □ Analogový model jednotkové funkce

Jednotkovou funkci v analytické matematice definujeme výrazem

$$1(t) = 0 \text{ pro } t < 0,$$

$$1(t) = 1 \text{ pro } t > 0$$

a jednotkový skok posunutý v čase o hodnotu  $t_k$  výrazem

$$1(t - t_k) = 0 \text{ pro } t < t_k,$$

$$1(t - t_k) = 1 \text{ pro } t > t_k,$$

kde  $t_k$  je libovolný čas.

#### □ Diskrétní model jednotkové funkce

Jednotkovými funkcemi vzorkujeme měřené veličiny a následně zpracováváme metodami numerické matematiky.

Při měření veličin analogově digitální převodníky časovou funkci rovnoměrně (ekvidistantně) vzorkují na časovém intervalu  $t_0$   $n$  vzorky, a to vyjadřujeme pomocí diskrétních posunutých jednotkových funkcí

$$1[n - k] = 0 \text{ pro } n < k,$$

$$1[n - k] = 1 \text{ pro } n \geq k,$$

kde  $n$  je celočíselný podíl času  $t$  a doby vzorkovacího intervalu  $t_0$  a  $k = 0, 1, 2, \dots$

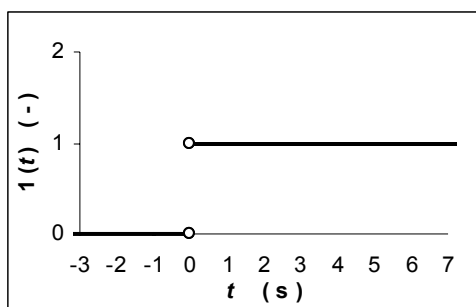
### □ Fyzikální model jednotkové funkce

Analogový model jednotkového skoku vykazuje v časovém okamžiku  $t=0$  nespojitost prvního druhu (obr. 1.6a), obr.1.7a)) a existují zde proto jen konečné jednostranné limity zleva a zprava. Při vyjadřování skokových změn fyzikálních veličin budeme ale brát zřetel na to, že se mění jejich energie spojitě a proto v grafech budeme respektovat tuto skutečnost kreslením kolmé spojnice mezi počáteční a konečnou hodnotou skokové změny a vzorkované hodnoty veličin budeme zobrazovat jako spojitě analogové průběhy, což matematicky zdůrazníme kulatými závorkami ve výrazech pro zápis fyzikálních modelů jednotkových funkcí

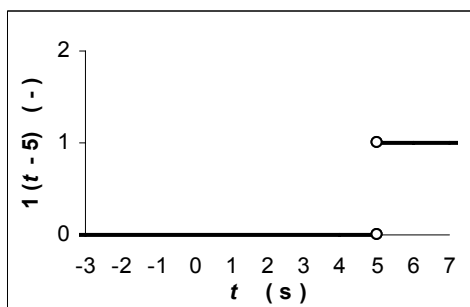
$$1_k = (n - k) = 0 \text{ pro } n < k ,$$

$$1_k = (n - k) = 1 \text{ pro } n \geq k .$$

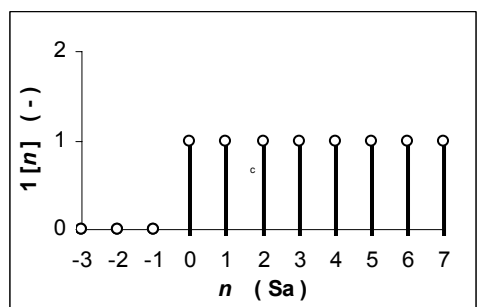
Grafické zobrazení analogového, diskrétního a fyzikálního modelu jednotkové funkce je na obr. 1.6 a jednotkové funkce posunuté o pět vzorků na obr. 1.7.



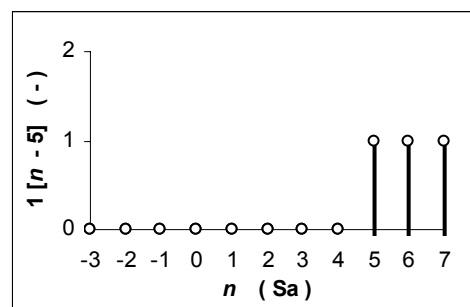
a) analogový model;



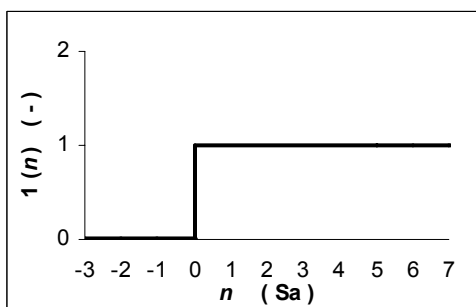
a) analogový model;



b) diskrétní model;



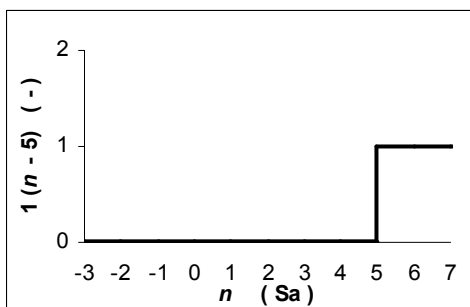
b) diskrétní model;



c) fyzikální model;

**Obr. 1.6** Jednotkové funkce:

analogový, diskrétní a fyzikální model.



c) fyzikální model;

**Obr. 1.7** Posunutá jednotkové funkce:

analogový, diskrétní a fyzikální model.

### □ Syntéza jednotkových funkcí

Kvantovanou hodnotu (amplitudu)  $k$ -tého (posunuté) fyzikálního modelu diskrétní jednotkové funkce definujeme koeficientem  $(A_k) = a_k \cdot (n - k)$ .

Kvantovaný průběh veličiny  $v(n)$  pak získáme součtem posloupnosti (syntézou) všech amplitud v příslušných vzorkovacích intervalech. Kvantovaný průběh veličiny  $v(n)$  navíc můžeme násobit činitelem (měřítkem)  $m$ , pak

$$v(n) = m \cdot \sum_{k=0}^n (A_k).$$

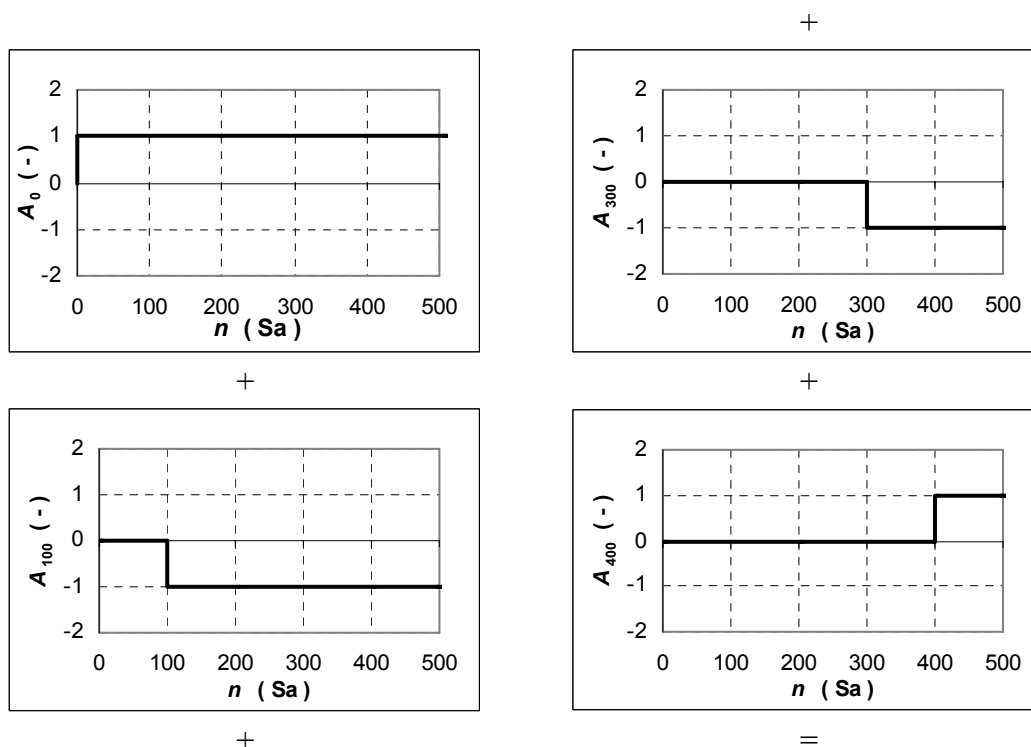
Hodnotou měřítka je obvykle hodnota měřicí konstanty čidla a tím zavádíme i rozměr fyzikální veličiny. Např.  $m = 25 \text{ V / dílek}$ .

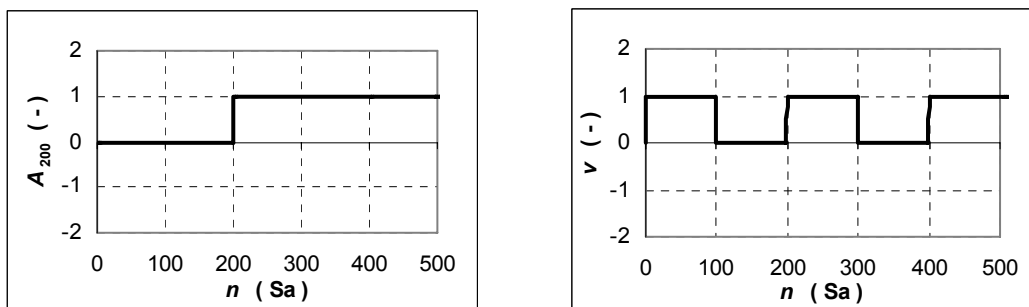
### Příklad 1.6.

*Zobrazte součet posloupností jednotkových skoků  $1_0 - 1_{100} + 1_{200} - 1_{300} + 1_{400} = v(n)$ .*



**Řešení:** Je prezentováno v obr. 1.8.





+

**Obr. 1.8** Zobrazení součtu posloupností jednotkových skoků

$$1_0 - 1_{100} + 1_{200} - 1_{300} + 1_{400} = v(n).$$


### Shrnutí pojmů 1.3.

Periodické funkce účinně modelujeme součtem posloupností neperiodických funkcí-jednotkových skoků. Model následně zpracováváme metodami numerické matematiky tabulkovými kalkulátory, které vytváříme v prostředí tabulkových procesorů.



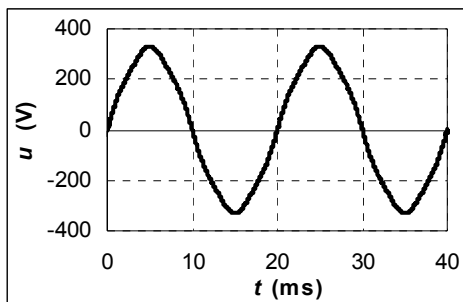
### Otázky 1.3

1. Matematickým zápisem rozlište analogový, diskretní a fyzikální model jednotkové funkce.
2. Matematickým zápisem rozlište analogový, diskretní a fyzikální model jednotkové funkce posunuté o  $k$  vzorků.
3. Odůvodněte zavedení fyzikálního modelu (posunuté) jednotkové funkce.
4. Popište způsob modelování reálných průběhů pomocí posunutých jednotkových funkcí.
5. Formulujte syntézu posunutých jednotkových funkcí.

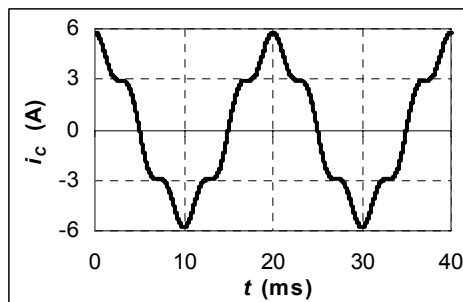


### Úlohy k řešení 1.3.

Na obr. 1.9 jsou zobrazeny průběhy napětí a proudu kondenzátoru, které byly při měření kvantovány 12-ti bitovým A/D převodníkem s rychlostí vzorkování  $100 \text{ kSa.s}^{-1}$ .



a) Napětí kapacitoru



b) Proud kapacitoru

Obr. 1.9 Průběhy napětí a proudu kondenzátoru.

1. Vypočítejte počet kvantovacích úrovní pro průběhy na obr. 1.9.
2. Vypočítejte počet členů posloupností posunutých jednotkových funkcí zobrazujících průběhy na obr. 1.9.
3. Vymezte hodnotu periody průběhů na obr. 1.9.
4. Uveďte počet zobrazených period průběhů na obr. 1.9.
5. Vypočítejte počet vzorků na periodu průběhů na obr. 1.9.
6. Stanovte hodnotu kmitočtu průběhů na obr. 1.9.
7. Uveďte údaje charakterizující okamžité hodnoty průběhů na obr. 1.9.
8. Odhadněte expertně očima hodnoty amplitud průběhů na obr. 1.9.
9. Slovně popište vztah mezi okamžitými hodnotami proudu a napětí kapacitoru na obr. 1.9.
10. Formulujte matematický model popisující vztah mezi okamžitými hodnotami proudu a napětí kapacitoru na obr. 1.9.



## KLÍČ K ŘEŠENÍ

1. Počet kvantovacích úrovní je  $2^{12} = 4096$ .
2. Počet členů posloupností určíme součinem doby zobrazeného intervalu  $J = 4 \cdot 10^{-2} \text{ s}$  a rychlostí vzorkování  $v_s = 100 \text{ kSa} \cdot \text{s}^{-1}$ , což je 4000 členů, vzorků (Samplů).
3.  $T = 20 \text{ ms}$ .
4. Dvě periody.
5.  $N = 2000 \text{ Sa}$ .
6.  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} = 50 \text{ Hz}$ .
7. Amplituda, perioda nebo kmitočet.
8.  $U_m \doteq 300 \text{ V}$ ,  $I_{Cm} \doteq 6 \text{ A}$ .

9. Okamžité hodnoty proudu kapacitoru jsou přímo úměrné derivaci okamžitých hodnot napětí kapacitoru podle času.

10.  $i_C = C \frac{du}{dt}$  .

## 1.4. Efektivní hodnota periodické veličiny



### VÝKLAD

Účinnou (efektivní) hodnotu  $V$  periodické veličiny  $v$  definujeme výrazem

$$V = \sqrt{\frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v^2 \cdot dt} ,$$

kde -  $c$  je přirozené (celé) číslo,  $T$  perioda.

#### □ Skalární součin funkcí

V matematice výraz

$$\int_a^b v^2 \cdot dt$$

nazýváme skalárním součinem dvou identických funkcí a označujeme ho symbolem  $(v, v)$  , tj.

$$\int_a^b v^2 \cdot dt = \int_a^b v \cdot v \cdot dt = (v, v) .$$

#### □ Fyzikální význam skalárního součinu funkcí

Fyzikálně skalární součin dvou identických funkcí na libovolném intervalu  $J \in \langle a, b \rangle$  znamená hodnotu práce vykonané okamžitými hodnotami veličiny na prvku s jednotkovou hodnotou vodivosti  $G = 1 \text{ S}$  nebo odporu  $R = 1 \Omega$  .

#### □ Realizace výpočtu efektivní hodnoty

Účinnou (efektivní) hodnotu veličiny nelze nikdy změřit, ale pouze vypočítat podle definičního výrazu v krocích:

1. krok: vymezíme (změříme) okamžitou hodnotu veličiny,
2. krok: okamžité hodnoty veličiny umocníme na druhou,
3. krok: druhou mocninu veličiny integrujeme na daném intervalu,
4. krok: hodnotu integrálu dělíme hodnotou integračního intervalu,
5. krok: na periodě nebo jejich celočíselných násobcích odečteme z předchozího podílu hodnotu, kterou odmocníme.

### □ Realizace výpočtu efektivní hodnoty v numerické matematice

V numerické matematice efektivní hodnotu veličiny definujeme na počtu vzorků (posloupnosti hodnot) periody  $N$  nebo jejich celočíselných násobcích  $cN$  výrazem

$$V = \sqrt{\frac{1}{cN} \sum_{n=a}^{n=a+cN} v_n^2},$$

kde  $v_n$  je posloupnost hodnot reprezentující okamžité hodnoty periodické veličiny  $v$ .

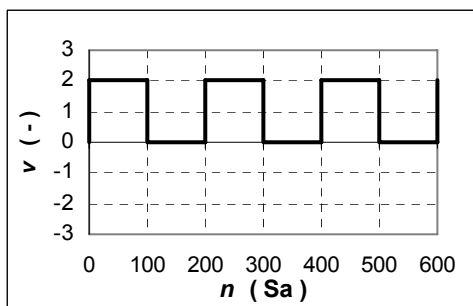
Postup výpočtu realizujeme v krocích

1. krok: vymezení posloupnosti hodnot veličiny  $v_n$ ,
2. krok: umocníme na druhou posloupnost hodnot veličiny  $v_n$ ,
3. krok: sečteme na daném intervalu  $J \in [a, a + cN]$  druhé mocniny posloupnosti hodnot

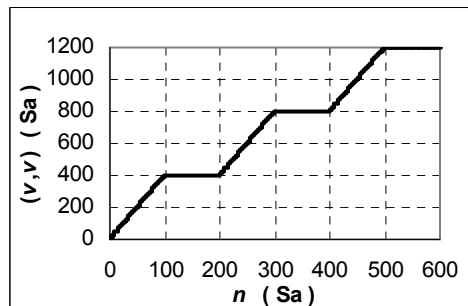
$$\text{veličiny } \sum_{n=a}^{n=a+cN} v_n^2,$$

4. krok: součet druhých mocnin dělíme hodnotou sumačního intervalu  $\frac{1}{J} \sum_{n=a}^{n=a+cN} v_n^2 = \frac{1}{cN} \sum_{n=a}^{n=a+cN} v_n^2$ ,

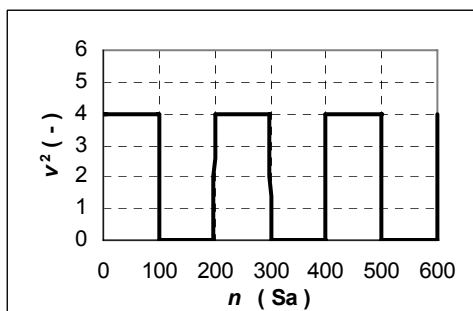
5. krok: efektivní hodnotu stanovíme odmocněním předchozího výrazu.



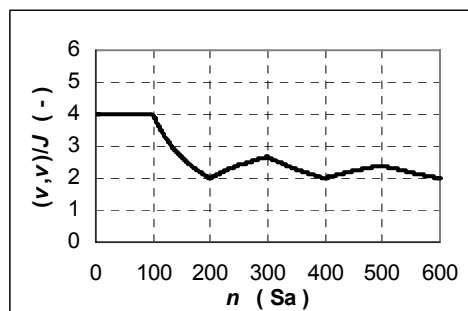
a) okamžité hodnoty veličiny



c) součet hodnot druhé mocniny



b) druhá mocnina



d) podíl součtu a sumačního intervalu

**Obr. 1.10** Postup numerického výpočtu efektivní hodnoty; v daném případě pro  $N = 200 \text{ Sa}$ ,  $c = 1; 2; 3$ ,  $J = (200; 400; 600) \text{ Sa}$ :  $V = \sqrt{(v,v)/J} = \sqrt{2}$ .

**Příklad 1.7.**

Zobrazte graficky výpočet efektivní hodnoty veličiny v obr. 1.10 a).

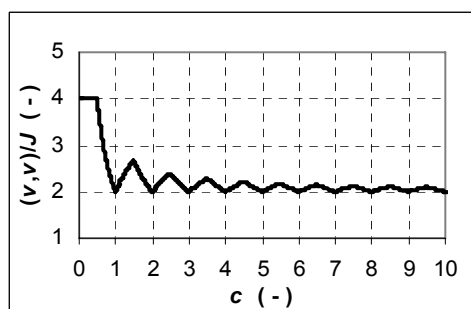


**Řešení:** Výpočet realizujeme v tabulkovém kalkulátoru a znázorníme v obr. 1.10 b) až obr. 1.10 d). Efektivní hodnota veličiny  $V = \sqrt{2}$ .

□ **Realizace výpočtu efektivní hodnoty měřicími přístroji**

Běžné měřicí přístroje (ampérmetry, voltmetry, multimetry), jsou vybaveny tabulkovým procesorem pro výpočet efektivních hodnot měřených okamžitých hodnot veličin, ale nejsou schopny identifikovat periodu. Proto vyhodnocují efektivní hodnotu na intervalu  $J$  mnohem větším jak doba periody  $T$ , obvykle několik desetin vteřiny. Střední hodnota skalárního součinu s narůstající hodnotou intervalu tlumeně osciluje (obr. 10 e)) a pro  $J \rightarrow \infty$  dosahuje hodnoty pro  $J = cT$ , respektive  $J = cN$ , což zapíšeme výrazem

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \frac{(v, v)}{J} = \frac{(v, v)}{cN}.$$



**Obr. 1.10 e)** Střední hodnoty skalárního součinu periodické veličiny v obr. 10 a).



**Shrnutí pojmů 1.4.**

Efektivní hodnotu veličiny nelze nikdy změřit, lze ji pouze vypočítat buď analytickými, nebo numerickými metodami matematiky.



**Otázky 1.4.**

1. Uveďte, pro jaké veličiny definujeme její efektivní hodnotu.
2. Napište výraz pro výpočet efektivní hodnoty periodické veličiny.
3. Vymezte kroky výpočtu efektivní hodnoty periodické veličiny v numerické matematice.
4. Definujte skalární součin dvou identických funkcí.
5. Odůvodněte fyzikální význam skalárního součinu dvou identických veličin.



## Úlohy k řešení 1.4.

1. Uveďte způsob výpočtu efektivní hodnoty veličiny měřicími přístroji.



## KLÍČ K ŘEŠENÍ

1. Odpověď naleznete v odstavci „Realizace výpočtu efektivní hodnoty“



## TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, článek 2.2.

[2] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů II. Skriptum ČVUT Praha 2004, článek 6. 1., 6. 2.



## Studijní texty

[3] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 4.1.



## VIDEO A VIRTUÁLNÍ LABORATOŘE

Doplňující videa:

1\_A\_Prezentace\_cestina.wmv  
1\_B\_Prezentace\_anglictina.wmv

1\_1\_Analogovy\_osciloskop.wmv  
1\_2\_Digitalni\_osciloskop.wmv  
1\_3\_Ampermetr.wmv  
1\_4\_Voltmetr.wmv  
1\_5\_Stejnosemny\_zdroj.wmv  
1\_6\_Kondenzator\_1.wmv  
1\_7\_Kondenzator\_2.wmv  
1\_8\_Kondenzator\_3.wmv  
1\_9\_Rezistor\_1.wmv  
1\_10\_Rezistor\_2.wmv  
1\_11\_Rezistor\_3.wmv

Doplňující virtuální laboratoře:

1\_1\_Harmonicka\_funkce.xls  
1\_2\_Vykony\_harmonicka\_funkce.xls  
1\_3\_Prace\_harmonicka\_funkce.xls

## 2. TVARY FOURIEROVY ŘADY



**Čas ke studiu:** 3 hodiny



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- rozlišit tvary Fourierových řad
- provést rozbor harmonické analýzy
- odvodit výpočet amplitud složkového tvaru

### 2.1. Fourierova řada



#### VÝKLAD

Spojité periodický průběh veličiny můžeme ve svých představách vyjádřit součtem stejnosměrné složky a nekonečného počtu harmonických funkcí, což vyjádříme zápisem, který je znám pod názvem Fourierova řada.

#### □ Fourierova řada v modulovém tvaru

Fourierovou řadu v modulovém tvaru vyjadřujeme výrazem

$$v(\omega t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k),$$

kde  $C_0$  je stejnosměrná složka,  $k = 1; 2; 3 \dots \infty$  je řád harmonické,  $C_{mk}$  amplituda  $k$ -té harmonické,  $\omega$  úhlový kmitočet 1. (základní) harmonické,  $t$  čas a  $\psi_k$  počáteční fáze  $k$ -té harmonické.

Uvažované skládání stejnosměrné složky a harmonických složek ve výslednou periodickou neharmonickou funkci nazýváme harmonickou syntézou.

Rozklad periodického průběhu na řadu harmonických odvodil v roce 1807 matematik J. J. Fourier při zkoumání tepelných dějů, od té doby je tato metoda úspěšně používána v praxi. Tento postup nazýváme harmonickou analýzou, lze ji ale realizovat teprve až po vymezení tzv. báзовých funkcí. Harmonická funkce báзовou funkcí není, proto ji musíme vyjádřit součtem báзовých funkcí – Fourierovou řadou ve složkovém tvaru.

#### □ Fourierova řada ve složkovém tvaru

Fourierovou řadu ve složkovém tvaru definujeme výrazem

$$v(\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_{mk} \sin k\omega t + B_{mk} \cos k\omega t),$$

kde  $k = 0; 1; 2 \dots \infty$  je řád harmonické,  $A_{mk}$  amplituda  $k$ -té harmonické sinové složky a  $B_{mk}$  amplituda  $k$ -té harmonické kosinové složky.

Vyjádření periodické funkce  $v(\omega t)$  Fourierovou řadou ve složkovém tvaru jednoznačně vymezuje dva vektory báзовých funkcí: sinový  $\mathbf{b}_s(\sin k\omega t)$  a kosinový  $\mathbf{b}_c(\cos k\omega t)$ , každý s nekonečným počtem prvků, což je nezbytné k nalezení nekonečného počtu hodnot amplitud  $A_{mk}$  a nekonečného počtu hodnot amplitud  $B_{mk}$ .



### Shrnutí pojmů 2.1.

Periodickou veličinu vyjadřujeme Fourierovou řadou v modulovém a složkovém tvaru. Fourierovou řadu v modulovém tvaru lze použít pouze pro syntézu periodické veličiny, kdežto analýzu periodické funkce lze realizovat pro vyjádření Fourierovy řady ve složkovém tvaru.



### Otázky 2.1.

1. Napište Fourierovou řadu v modulovém tvaru.
2. Napište Fourierovou řadu ve složkovém tvaru.
3. Uveďte, kterými hodnotami charakterizujeme Fourierovou řadu v modulovém tvaru.
4. Uveďte, kterými hodnotami charakterizujeme Fourierovou řadu ve složkovém tvaru.
5. Pojmenujte tvar Fourierovy řady, kterým definujeme vektory báзовých funkcí.
6. Vymezte vektory báзовých funkcí.



### Úlohy k řešení 2.1.

1. Pojmenujte tvar Fourierovy řady, kterým definujeme vektory báзовých funkcí.
2. Zapište sinový vektor báзовých funkcí.
3. Zapište kosinový vektor báзовých funkcí.
4. Uveďte účel vymezení báзовých funkcí.



### KLÍČ K ŘEŠENÍ

Odpovědi na úlohy k řešení naleznete v odstavci „Fourierova řada ve složkovém tvaru“.

## 2.2. Harmonická analýza



### VÝKLAD

Harmonickou analýzou určujeme amplitudy Fourierovy řady ve složkovém tvaru. Z hlediska způsobu výpočtu rozlišujeme postup analytický a numerický.

Analytický postup výpočtu je definován na analytickém popisu periodické veličiny. Analyticky můžeme bez omezení diagnostikovat jakoukoliv harmonickou.

Neumíme-li periodickou veličinu dostatečně přesně popsat analyticky, a to je v praxi běžné, musíme použít postup numerický, který je definován na vzorcích (posloupností hodnot) odebraných z periodické funkce rychlosti vzorkování  $v_s$ . Ale vzorkování způsobuje překrývání spekter v důsledku tzv. zrcadlení, a tím razantní znehodnocení výsledků harmonické analýzy. Abychom překrývání spekter zabránili, musíme před vzorkováním signálu omezit jeho spektrum dolnofrekvenční propustí, která nepřenesla hodnotu kmitočtu větší než je polovina hodnoty vzorkovací rychlosti. Dolnofrekvenční propust nemusíme použít, zvolíme-li vzorkovací rychlost alespoň deset krát větší než je hodnota kmitočtu největší počítané harmonické.

#### □ Výpočet amplitud složkového tvaru

Neznámé hodnoty amplitud  $A_{mk}$  a  $B_{mk}$  určíme integrální transformací Fourierovy řady ve složkovém tvaru z výrazů

5. v analytické matematice:

a) pro proměnnou  $\omega t$

$$A_{mk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \cdot \sin k\omega t \cdot d\omega t, \quad B_{mk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \cdot \cos k\omega t \cdot d\omega t, \quad B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \cdot dt$$

b) pro proměnnou  $t$

$$A_{mk} = \frac{2}{T} \int_0^T v(\omega t) \cdot \sin k\omega t \cdot dt, \quad B_{mk} = \frac{2}{T} \int_0^T v(\omega t) \cdot \cos k\omega t \cdot dt, \quad B_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(\omega t) \cdot dt$$

6. v numerické matematice

$$A_{mk} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N v_n \sin kn \frac{2\pi}{N}, \quad B_{mk} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N v_n \cos kn \frac{2\pi}{N}, \quad B_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n.$$

#### □ Výpočet amplitud modulového tvaru

Z vypočítaných hodnot amplitud  $A_{mk}$  a  $B_{mk}$  složek  $k$ -té harmonické funkce stanovíme amplitudu  $k$ -té harmonické funkce geometrickým součtem amplitud  $A_{mk}$  a  $B_{mk}$

$$\sqrt{A_{mk}^2 + B_{mk}^2} = C_{mk}$$

#### □ Výpočet počátečních fází modulového tvaru

Dávejte si pozor při vyhodnocování počáteční fáze, její skutečná hodnota závisí na kvadrantu. Obvykle tabulkové kalkulátory hodnotu počáteční fáze vyhodnotí správně podle výrazu

$$\psi_k = \arctg \frac{B_{mk}}{A_{mk}}$$

Počítáme-li hodnotu počáteční fáze pomocí běžné kalkulačky, doporučuji následující postup: Nejdříve určíme

$$\psi'_k = \arctg \frac{B_{mk}}{A_{mk}},$$

přičemž pro:

1. kvadrant, tj.  $A_{mk} > 0 \wedge B_{mk} > 0$   $\psi_k = \psi'_k$
2. kvadrant, tj.  $A_{mk} < 0 \wedge B_{mk} > 0$   $\psi_k = 180 - \psi'_k$
3. kvadrant, tj.  $A_{mk} < 0 \wedge B_{mk} < 0$   $\psi_k = 180 + \psi'_k$
4. kvadrant, tj.  $A_{mk} > 0 \wedge B_{mk} < 0$   $\psi_k = 360 - \psi'_k = -\psi'_k$

### □ Spektra harmonických

Harmonickou analýzou identifikujeme hodnoty složek harmonických funkcí obsažených v diagnostikovaném periodickém průběhu veličiny. Zjištěné hodnoty amplitud složek harmonických funkcí  $A_{mk}$  a  $B_{mk}$  zapisujeme do tabulek a zobrazujeme úsečkami v grafech, ale to je málo obvyklé. Proto z hodnot amplitud složek harmonické funkce vypočítáme amplitudu harmonické funkce a její počáteční fázi. Tyto hodnoty pak graficky zobrazujeme v závislosti na řádu harmonické nebo kmitočtu harmonické. Zobrazení hodnot amplitud  $C_{mk}$  nazýváme modulové spektrum a zobrazení hodnot počátečních fází  $\psi_k$  nazýváme fázové spektrum. Někdy je výhodné prezentovat poměrné hodnoty amplitud v procentech efektivní hodnoty veličiny nebo efektivní hodnoty její základní harmonické

### □ Efektivní hodnota

Efektivní hodnotu periodické veličiny  $V$  definujeme geometrickým součtem efektivních hodnot jednotlivých harmonických, tzv. Parsevalovu větou, výrazem

$$V = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} C_k^2} = \sqrt{C_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2} = \sqrt{C_0^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{mk}^2}{2}},$$

kde efektivní hodnota stejnosměrné složky se rovná hodnotě stejnosměrné složky a efektivní hodnota  $k$ -té harmonické se rovná hodnotě amplitudy dělené odmocninou ze dvou

$$C_k = \frac{C_{mk}}{\sqrt{2}}.$$

### □ Dirichletovy podmínky

Odborná literatura uvádí, že harmonickou analýzu lze uskutečnit pouze pro periodické funkce, které vyhovují tzv. Dirichletovým podmínkám. Tyto podmínky vyžadují, aby funkce byla jednoznačná, konečná a s konečným počtem extrémů a nespojitostí v průběhu periody. Pro reálné veličiny jsou tyto podmínky vždy splněny.

## □ Různé způsoby zápisu Fourierovy řady

Nebud'te zmateni ze zápisů Fourierovy řady v odborné literatuře. V praxi, jsou používána různá písmena: v matematice písmena malé abecedy  $a_k, b_k, c_k$ ; ve fyzice písmena velké abecedy  $A_k, B_k, C_k$ ; v elektrotechnice písmena velké abecedy s indexem „m“  $A_{mk}, B_{mk}, C_{mk}$  - všechny označují amplitudy  $k$ -té harmonické.



### Shrnutí pojmů 2.2.

Harmonickou analýzou určíme neznámé hodnoty amplitud  $A_{mk}$  a  $B_{mk}$  Fourierovy řady ve složkovém tvaru a z nich pak vypočítáme hodnoty amplitud  $C_{mk}$  a počátečních fází  $\psi_k$ .

Fourierovy řady v modulovém tvaru. Hodnoty amplitud nebo jejich poměrné hodnoty a hodnoty počátečních fází zobrazujeme v závislosti na kmitočtu nebo řádu harmonické ve spektrech.



### Otázky 2.2.

1. Rozlište způsob postupu výpočtu hodnot amplitud  $A_{mk}$  a  $B_{mk}$  složek  $k$ -té harmonické funkce.
2. Uveďte, co potřebujeme znát pro výpočet hodnot amplitud  $C_{mk}$  a počátečních fází  $\psi_k$ .
3. Napište výraz pro výpočet hodnot amplitud  $C_{mk}$ .
4. Napište výraz pro výpočet hodnot počátečních fází  $\psi_k$ .
5. Popište co je to spektrum.
6. Napište výraz pro výpočet efektivní hodnoty periodické veličiny z jejího vyjádření Fourierovou řadou.



### Úlohy k řešení 2.2.

1. Vypočítejte hodnotu amplitudy  $C_{mk}$  ze známých hodnot  $A_{mk} = \pm 3$  a  $B_{mk} = \pm 4$ .
2. Zobrazte v rovině komplexních čísel hodnoty všech tří amplitud a počáteční fází pro  $A_{mk} = \pm 3$  a  $B_{mk} = \pm 4$ .
3. Vypočítejte hodnoty počátečních fází  $\psi_k$  ze známých hodnot  $A_{mk} = \pm 3$  a  $B_{mk} = \pm 4$ .
4. Vypočítejte efektivní hodnotu proudu o okamžitých hodnotách  

$$i(t) = 6 + \sqrt{2} \cdot 12 \sin(\omega t + \psi) \text{ mA}$$
5. Vypočítejte efektivní hodnotu napětí o okamžitých hodnotách  

$$u(t) = \sqrt{2}(230 \sin \omega t \pm 40 \sin 3\omega t) \text{ V}.$$



## KLÍČ K ŘEŠENÍ

1. Hodnota amplitudy  $C_{mk} = 5$  je geometrickým součtem hodnot  $A_{mk} = \pm 3$  a  $B_{mk} = \pm 4$ .
2. Hodnotu amplitudy  $A_{mk}$  vynásíme na reálnou osu a hodnotu amplitudy  $B_{mk}$  na imaginární osu.
3. Hodnoty počátečních fází  $\psi_k$  určíme arkustangentou podílu  $B_{mk} = \pm 4$  a  $A_{mk} = \pm 3$ , v každém kvadrantu obdržíme jinou hodnotu.
4. Efektivní hodnota proudu je geometrickým součtem efektivní hodnoty stejnosměrné složky a efektivní hodnoty základní harmonické proudu

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2} = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5} \text{ mA} .$$

5. Efektivní hodnota napětí je geometrickým součtem efektivní hodnoty základní a efektivní hodnoty 3. harmonické napětí

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{230^2 + 40^2} \doteq 233,5 \text{ V} .$$

## 2.3. Harmonická syntéza



### VÝKLAD

Harmonickou syntézou popisujeme skládání (superpozici, ale tu jak už víme, můžeme aplikovat pouze v obvodech s lineárními hodnotami parametrů) harmonických funkcí, jejichž kmitočty jsou celočíselnými násobky kmitočtu základní harmonické.

Můžeme sečítat okamžité hodnoty harmonických funkcí získaných harmonickou analýzou, potom říkáme, že jejich součet aproximuje diagnostikovanou periodickou veličinu.

Po aproximaci periodické funkce konečným počtem harmonických vznikají překmity zejména v oblasti skokových změn periodické funkce. Tohoto jevu se nelze zbavit a je nazýván Gibbsův jev.

Můžeme také sečítat libovolné harmonické funkce za různým účelem, nejčastěji z důvodu názorného modelování jevů v praxi.

#### □ Rekonstrukce-model periodické veličiny

Označíme-li harmonickou funkci libovolného řádu harmonické  $c_k$  a vyjádříme-li jejich okamžité hodnoty rovnicí

$$c_k = C_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k) ,$$

pak superpozici (modelovaný průběh periodické veličiny)  $v_{mo}$  libovolného počtu harmonických nejstručněji vyjádříme zápisem

$$v_{mo} = \sum_{k=0}^n c_k .$$

### □ Nedokonalost modelu periodické veličiny

Harmonickou analýzou periodické veličiny jsme schopni určit pouze konečný počet harmonických s okamžitými hodnotami

$$c_k = C_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k),$$

jejichž součtem reprezentujeme (reálně modelujeme) pouze část periodického průběhu

$$v_{mo} = \sum_{k=0}^n c_k.$$

Nedokonalost (shortcoming) modelu okamžitých hodnot veličiny  $v_{sc}$  definujeme rozdílem okamžitých hodnot diagnostikované veličiny  $v$  a součtu okamžitých hodnot periodických funkcí zjištěných harmonickou analýzou rovnicí

$$v_{sc} = v - v_{mo}.$$

Nedokonalost modelu okamžitých hodnot veličiny posuzujeme expertně očima.

Pro automatizované posuzování definujeme činitel nedokonalosti modelu výrazem  $SCF = \frac{V_{sc}}{V} \cdot 100$  (%), kde  $V_{sc}$  je efektivní hodnota nedokonalosti modelu okamžitých hodnot veličiny a  $V$  efektivní hodnota veličiny. Obvykle by hodnota SCF neměla překročit 10 %.

### □ Efektivní hodnota nedokonalosti modelu periodické veličiny

Efektivní hodnota nedokonalosti modelu periodické veličiny je geometrickým rozdílem efektivní hodnoty periodické veličiny a efektivní hodnoty nedokonalosti modelu periodické veličiny, což vyjádříme zápisem

$$V_{sc} = \sqrt{V^2 - V_{mo}^2}.$$



### Shrnutí pojmů 2.3.

Harmonickou syntézou nazýváme skládání harmonických funkcí, jejichž kmitočty jsou celočíselnými násobky kmitočtu základní harmonické. Tím rekonstruujeme-modelujeme pouze část periodického průběhu veličiny. Nedokonalost modelu okamžitých hodnot definujeme algebraickým rozdílem okamžitých hodnot veličiny a modelu a posuzujeme ho expertně očima. Pro automatizované posuzování definujeme činitel nedokonalosti modelu.



### Otázky 2.3.

1. Popište slovně postup při harmonické syntéze.
2. Vyjádřete matematicky postup při harmonické syntéze.
3. Vysvětlete co je to rekonstrukce.
4. Napište výraz pro rekonstrukci-model periodické veličiny konečným počtem harmonických.
5. Uveďte, jak se daří modelovat periodickou veličiny konečným počtem harmonických.

6. Vymezte slovně nedokonalost modelu okamžitých hodnot periodické veličiny.
7. Vyjádřete matematicky nedokonalost modelu okamžitých hodnot periodické veličiny.
8. Uveďte, jak posuzujeme nedokonalost modelu okamžitých hodnot periodické veličiny.
9. Definiujte činitel nedokonalosti modelu.



### Úlohy k řešení 2.3.

1. Vypočítejte činitel nedokonalosti modelu proudu, je-li  $I = 5 \text{ mA}$  a  $I_{\text{mo}} = 4 \text{ mA}$ .
2. Vypočítejte činitel nedokonalosti modelu napětí, je-li  $U = 100 \text{ V}$  a  $U_{\text{mo}} = 98 \text{ V}$ .



### KLÍČ K ŘEŠENÍ

1. 1.  $\text{SCF}_I = 60 \%$ .
2. 2.  $\text{SCF}_U \doteq 19,9 \%$

## 2.4. Odvození výpočtu amplitud složkového tvaru



### VÝKLAD

Při odvození výpočtu amplitud složkového tvaru nejdříve periodickou funkci definujeme pomocí básových funkcí, protože jsou jediným nástrojem pro vymezení amplitud složkového tvaru Fourierovy řady.

#### □ Harmonická funkce

Okamžité hodnoty  $v(\omega t)$  harmonická funkce jsou definovány výrazem

$$v(\omega t) = V_m \sin(\omega t + \psi),$$

kde  $V_m$  je amplituda (minimální i maximální okamžitá hodnota),  $\omega$  úhlový kmitočet a  $\psi$  počáteční fáze.

Přičemž  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ .

Okamžité hodnoty harmonické funkce jsou jednoznačně definovány třemi parametry: amplitudou, úhlovým kmitočtem  $\omega$  nebo kmitočtem  $f$  respektive periodou  $T$  a počáteční fází.

Efektivní hodnotu harmonické funkce stanovíme podle definičního výrazu, čímž obdržíme známý vztah mezi efektivní hodnotou  $V$  a amplitudou  $V_m$

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}.$$

Výraz  $(\omega t \pm \psi)$  nazýváme fáze (fázový úhel) a jeho jednotkou je radián. Často pro lepší názornost udáváme hodnotu fáze ve stupních ( $^\circ$ ), kterou obdržíme vynásobením hodnoty v radiánech konstantou  $\frac{180}{\pi}$ .

Často okamžité hodnoty harmonické funkce vyjadřujeme pouze v závislosti na čase výrazem

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \psi) = V_m \sin \omega \left( t + \frac{\psi}{\omega} \right) = V_m \sin \omega \left( t + \frac{\psi}{2\pi} T \right),$$

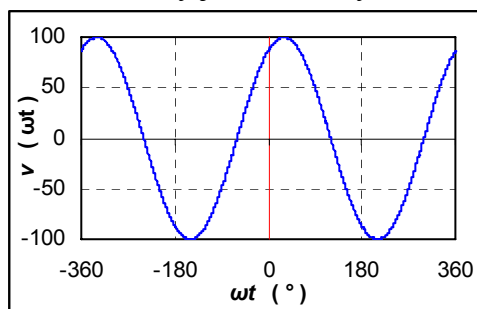
čímž stupnici nezávislé proměnné  $\omega t$  dělíme  $\omega$  a obdržíme nezávisle proměnnou čas  $t$ .

### Příklad 2.1.

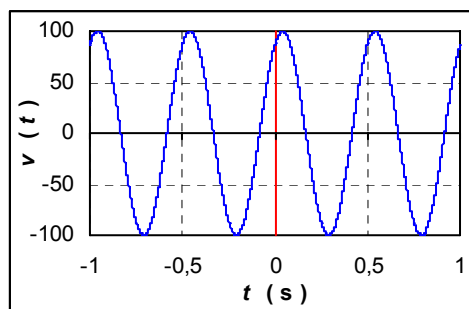
Zobrazte harmonickou funkci o amplitudě  $V_m = 100$ , periodě  $T = 0,5$  s a počáteční fázi  $\psi = 60^\circ$  v závislosti a) na úhlu ( $^\circ$ ), b) na čase  $t$ .



**Řešení:** Průběhy jsou uvedeny v obr. 2.1.



a) závislost harmonické fce na úhlu ( $^\circ$ )



b) závislost harmonické fce na čase (s)

**Obr. 2.1** Zobrazení harmonické funkce  $100 \cdot \sin(2\pi \cdot 2t + 60 \cdot \frac{\pi}{180})$ .

### □ Bázové funkce

Bázové funkce vymezíme vyjádřením harmonické funkce ve složkovém tvaru pomocí goniometrických funkcí součtu úhlu výrazem

$$v(\omega t) = V_m \sin(\omega t + \psi) = (V_m \cos \psi) \cdot \sin \omega t + (V_m \sin \psi) \cdot \cos \omega t = A_m \sin \omega t + B_m \cos \omega t,$$

kde bázovými funkcemi jsou funkce  $\sin \omega t$  a  $\cos \omega t$  s jednotkovými hodnotami amplitud.

Bázové funkce jsou nástrojem harmonické analýzy, tj. určením neznámých hodnot amplitud  $A_m$  a  $B_m$  sinové a kosinové složky harmonického průběhu.

### □ Odvození výpočtu amplitud složkového tvaru harmonické funkce

Neznámé hodnoty amplitud  $A_m$  a  $B_m$  určíme integrální transformací harmonického průběhu z výrazů

1. v analytické matematice:

a) pro proměnnou  $\omega t$

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \cdot \sin \omega t \cdot d\omega t, \quad B_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \cdot \cos \omega t \cdot d\omega t$$

b) pro proměnnou  $t$

$$A_m = \frac{2}{T} \int_0^T v(\omega t) \cdot \sin \omega t \cdot dt, \quad B_m = \frac{2}{T} \int_0^T v(\omega t) \cdot \cos \omega t \cdot dt$$

2. v numerické matematice

$$A_m = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N v_n \sin n \frac{2\pi}{N}, \quad B_m = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N v_n \cos n \frac{2\pi}{N}$$

Výrazy pro výpočet amplitud odvodíme ve dvou krocích:

1. krok: vynásobíme rovnici harmonické funkce ve složkovém tvaru bázovou funkcí
2. krok: integrujeme vynásobenou rovnici na intervalu periody.

### Příklad 2.2.

*Odvodte výraz pro stanovení hodnoty amplitudy  $A_m$  sinové složky harmonické funkce pro proměnnou  $\omega t$ .*



**Řešení:** Výraz pro stanovení hodnoty amplitudy  $A_m$  získáme ve dvou krocích:

1. krok: vynásobíme rovnici harmonické funkce ve složkovém tvaru bázovou funkcí  $\sin \omega t$   
 $v(\omega t) = A_m \sin \omega t + B_m \cos \omega t \quad / \cdot \sin \omega t$

$$v(\omega t) \cdot \sin \omega t = A_m \sin^2 \omega t + B_m (\cos \omega t) \cdot \sin \omega t = A_m \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) + B_m (\cos \omega t) \cdot \sin \omega t;$$

2. krok: integrujeme vynásobenou rovnici pro proměnnou  $\omega t$  podle  $d\omega t$  na intervalu periody, tj. v mezích od 0 do  $2\pi$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \cdot \sin \omega t \cdot d\omega t &= \int_0^{2\pi} \left\{ A_m \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) + B_m (\cos \omega t) \cdot \sin \omega t \right\} d\omega t = \\ &= \left[ A_m \frac{1}{2} \left( \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right) + B_m \frac{1}{2} \sin^2 \omega t \right]_0^{2\pi} = \\ &= A_m \frac{1}{2} (2\pi - 0) + B_m \cdot 0 - A_m \frac{1}{2} (0 - 0) - B_m \cdot 0 = A_m \pi \end{aligned}$$

a z toho

$$\underline{\underline{A_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \cdot \sin \omega t \cdot d\omega t}}$$

**Příklad 2.3.**

*Odvoďte výraz pro stanovení hodnoty amplitudy  $B_m$  kosinové složky harmonické funkce pro proměnnou  $\omega t$ .*



**Řešení:** Výraz pro stanovení hodnoty amplitudy  $B_m$  získáme ve dvou krocích:

1. krok: vynásobíme rovnici harmonické funkce ve složkovém tvaru bázovou funkcí  $\cos \omega t$   
 $v(\omega t) = A_m \sin \omega t + B_m \cos \omega t \quad / \cdot \cos \omega t$

$$v(\omega t) \cdot \cos \omega t = A_m (\sin \omega t) \cdot \cos \omega t + B_m \cos^2 \omega t = A_m (\sin \omega t) \cdot \cos \omega t + B_m \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t);$$

2. krok: integrujeme vynásobenou rovnici pro proměnnou  $\omega t$  podle  $d\omega t$  na intervalu periody, tj. v mezích od 0 do  $2\pi$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \cdot \cos \omega t \cdot d\omega t &= \int_0^{2\pi} \left\{ A_m (\sin \omega t) \cdot \cos \omega t + B_m \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) \right\} d\omega t = \\ &= \left[ A_m \frac{1}{2} \sin^2 \omega t + B_m \frac{1}{2} \left( \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right) \right]_0^{2\pi} = \\ &= A_m \cdot 0 + B_m \frac{1}{2} (2\pi + 0) - A_m \cdot 0 - B_m (0 + 0) = B_m \pi \end{aligned}$$

a z toho

$$\underline{\underline{B_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \cdot \cos \omega t \cdot d\omega t .}}$$

**Příklad 2.4.**

*Odvoďte výraz pro stanovení hodnoty amplitudy  $A_m$  a  $B_m$  je-li nezávislou proměnnou čas  $t$ .*



**Řešení:** Výraz pro stanovení hodnoty amplitudy  $A_m$  a  $B_m$  získáme ve dvou krocích:

1. krok: vynásobíme rovnici harmonické funkce ve složkovém tvaru bázovou funkcí  $\sin \omega t$  a pak  $\cos \omega t$

2. krok: Pro proměnnou  $t$  integrujeme obě rovnice podle  $dt$  na intervalu periody, tj. v mezích od 0 do  $T$

Obdržíme výsledky:

$$\underline{\underline{A_m = \frac{2}{T} \int_0^T v(\omega t) \cdot \sin \omega t \cdot dt}}, \quad \underline{\underline{B_m = \frac{2}{T} \int_0^T v(\omega t) \cdot \cos \omega t \cdot dt}}$$

$$\underline{\underline{B_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \cdot \cos \omega t \cdot d\omega t .}}$$

**Příklad 2.5.**

Odvoďte výraz pro stanovení hodnoty amplitudy  $B_0$  kosinové složky harmonické funkce, tzv. stejnosměrné složky periodické funkce  $V_{DC} = C_0$ .



**Řešení:** Výraz pro stanovení hodnoty amplitudy  $B_0$  získáme ve dvou krocích:

1. krok: pro  $k = 0$  vynásobíme Fourierovou řadu ve složkovém tvaru bazovou funkcí  $\cos k\omega t = 1$

$$v(\omega t) \cdot 1 = 0.1 + B_0 \cdot 1 \cdot 1$$

2. krok: integrujeme vynásobenou Fourierovou řadu pro proměnnou  $t$  podle  $dt$  na intervalu periody, tj. v mezích od 0 do  $T$

$$\int_0^T v(\omega t) \cdot dt = \int_0^T B_0 \cdot dt = [B_0]_0^T = B_0 T \Rightarrow \underline{\underline{B_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(\omega t) \cdot dt}}$$

V praxi obvykle vyčísľujeme hodnoty amplitud složek harmonického průběhu metodami numerické matematiky z výrazů

$$A_m = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N v_n \sin n \frac{2\pi}{N}, \text{ respektive } B_m = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N v_n \cos n \frac{2\pi}{N},$$

kde  $v_n$  je hodnota veličiny  $n$ -tého vzorku,  $n$  pořadí vzorku,  $N$  perioda (počet vzorků na periodu).

Dávejte si pozor při vyhodnocování počáteční fáze, její skutečná hodnota závisí na kvadrantu. Obvykle tabulkové kalkulátory hodnotu počáteční fáze vyhodnotí správně podle výrazu

$$\psi = \arctg \frac{B_m}{A_m}.$$

Počítáme-li hodnotu počáteční fáze pomocí běžné kalkulačky, doporučuji následující postup:

Nejdříve určíme

$$\psi' = \arctg \frac{B_m}{A_m}$$

a pak dopočítáme hodnotu počáteční fáze pro:

1. kvadrant, tj.  $A_m > 0 \wedge B_m > 0$       $\psi = \psi'$
2. kvadrant, tj.  $A_m < 0 \wedge B_m > 0$       $\psi = 180 - \psi'$
3. kvadrant, tj.  $A_m < 0 \wedge B_m < 0$       $\psi = 180 + \psi'$
4. kvadrant, tj.  $A_m > 0 \wedge B_m < 0$       $\psi = 360 - \psi' = -\psi'$ .

### □ Odvození výpočtu amplitud složkového tvaru Fourierovy řady

Rovnici

$$v(\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_{mk} \sin k\omega t + B_{mk} \cos k\omega t)$$

postupně násobíme prvky vektorů báзовých funkcí a následně integrujeme na intervalu jedné periody.

Při určování hodnot amplitud Fourierovy řady ve složkovém tvaru tak vyčíslujeme hodnoty skalárních součinů dvou funkcí na intervalu periody. Všechny hodnoty skalárních součinů různých báзовých funkcí na intervalu periody jsou rovny nule. Takové báзовé funkce nazýváme ortogonální.

Násobení periodické funkce  $v(\omega)$  prvky vektorů báзовých funkcí a následná integrace součinu na periodě není nic jiného než hledání příslušných složek harmonických funkcí. V numerické matematice místo termínu integrace používáme pojmu kvadratura.

### □ Odvození výpočtu efektivní hodnoty veličiny z Fourierovy řady

Efektivní hodnotu periodické veličiny  $V$  odvodíme z definičního výrazu

$$V^2 = \frac{1}{T} \int_0^T v^2 \cdot dt = \frac{1}{T} (v, v)$$

tak, že druhou mocninu jejich okamžitých hodnot vyjádříme druhou mocninou Fourierovy řady ve složkovém tvaru, respektive součinem Fourierových řad ve složkovém tvaru, v nichž pro názornost zápisu nahradíme proměnnou  $k$  proměnnými  $K$

a  $L$ . Obdržíme

$$\begin{aligned} v^2 &= \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) \right]^2 = \left[ \sum_{K=0}^{\infty} (a_K + b_K) \right] \cdot \left[ \sum_{L=0}^{\infty} (a_L + b_L) \right] \\ &= \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{L=0}^{\infty} (a_K a_L + a_K b_L + b_K a_L + b_K b_L). \end{aligned}$$

Potom hodnoty všech skalárních součinů na době periody jsou ortogonální, kromě

$$\frac{1}{T} (a_K, a_L) = A_k^2 \quad \text{pro } K = L$$

a

$$\frac{1}{T} (b_K, b_L) = B_k^2 \quad \text{pro } K = L.$$

Potom

$$V^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k^2 + B_k^2) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^2,$$

kde  $A_k, B_k, C_k$  jsou efektivní hodnoty složky  $k$ -té harmonické, resp.  $k$ -té harmonické.

**Shrnutí pojmů 2.4.**

Vzorce pro výpočet amplitud Fourierovy řady ve složkovém tvaru odvodíme tak, že rovnici  $v(\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_{mk} \sin k\omega t + B_{mk} \cos k\omega t)$  postupně násobíme prvky vektorů bázových funkcí a součiny integrujeme na intervalu jedné periody.

**Otázky 2.4.**

1. Vymezte smysl bázových funkcí.
2. Formulujte způsob získání bázových funkcí.
3. Vyjádřete matematickým výrazem harmonickou funkci ve složkovém tvaru.
4. Formulujte způsob získání dvou vektorů bázových funkcí.

**Úlohy k řešení 2.4.**

1. Uveďte hodnotu amplitudy všech prvků vektorů bázových funkcí.
2. Definujte ortogonalitu bázových funkcí.
3. Vymezte ortogonální bázové funkce.
4. Ověřte ortogonalitu bázových funkcí ve virtuální laboratoři.
5. Vymezte bázové funkce, které nejsou ortogonální.
6. Ověřte ve virtuální laboratoři hodnoty skalárních součinů identických bázových funkcí

**KLÍČ K ŘEŠENÍ**

1. Amplituda všech prvků bázových funkcí je identicky rovna jedné.
2. Ortogonalitu definujeme nulovou hodnotou skalárního součinu dvou bázových funkcí na intervalu periody a jejich celočíselných násobcích.
3. Všechny různé bázové funkce jsou ortogonální.
4. Ve virtuální laboratoři zadáme různé bázové funkce a vyšetříme hodnotu jejich skalárního součinu na intervalu periody.
5. Identické bázové funkce nejsou ortogonální.
6. Ve virtuální laboratoři zadáváme identické bázové funkce a zjišťujeme jejich hodnotu (pro  $k \neq 0$  vykazují hodnotu 0,5 ; pro  $k = 0$  je  $(0,0) = 0$  a  $(1,1) = 1$ ).



## TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, kapitola 8.



## Studijní texty

[3] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 9.2



## VIRTUÁLNÍ LABORATOŘE

Doplňující virtuální laboratoře:

- 2\_1\_EfHodn\_DC\_AC\_slozka.xls
- 2\_2\_Prace\_harmonicka\_funkce.xls
- 2\_3\_Harmonicka\_analyza.xls
- 2\_4\_Zkresleni.xls
- 2\_5\_Vliv\_vzorkovani.xls
- 2\_6\_NF\_Vliv\_vzorkovani.xls
- 2\_7\_Vliv\_zrcadleni.xls
- 2\_8\_Harmonicke.xls

### 3. VYJÁDŘENÍ PERIODICKÉ VELIČINY SOUČTEM STŘÍDAVÉ A STEJNOSMĚRNÉ SLOŽKY



**Čas ke studiu:** 1 hodina



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- rozlišit stejnosměrnou a střídavou složku
- odvodit výpočet efektivní hodnoty

#### 3.1. Stejnosměrná a střídavá složka periodické veličiny

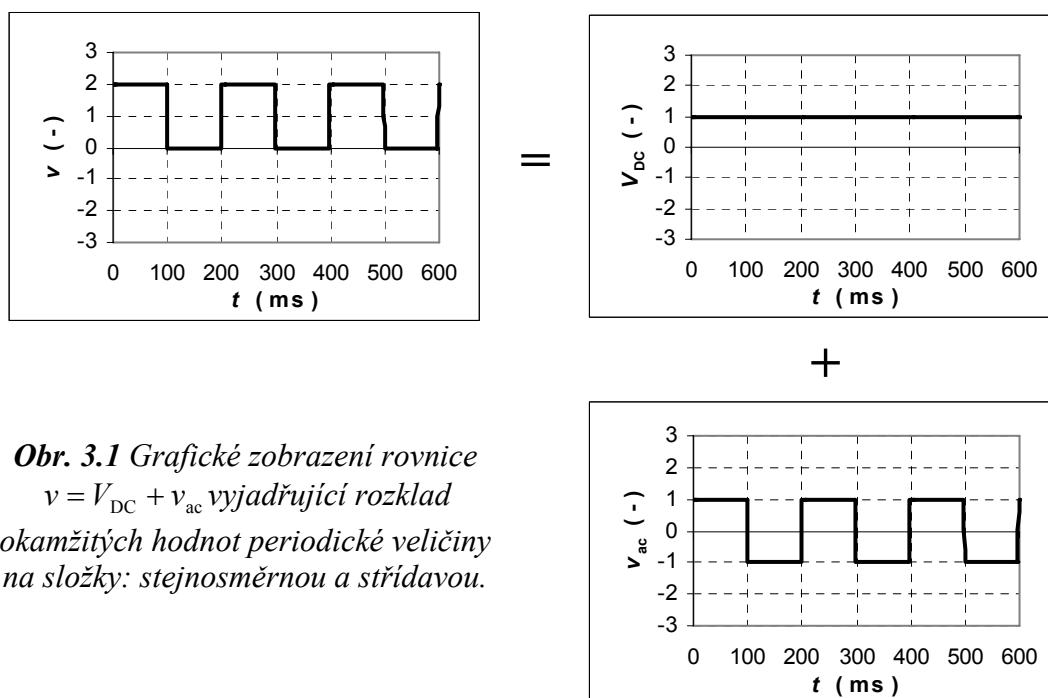


##### VÝKLAD

Okamžité hodnoty periodické veličiny  $v$  lze jednoznačně vyjádřit algebraickým součtem okamžitých hodnot stejnosměrné složky  $V_{DC}$  a okamžitých hodnot střídavé složky  $v_{ac}$ , zapsat rovnici

$$v = V_{DC} + v_{ac}$$

a graficky zobrazit v obr. 3.1.



**Obr. 3.1** Grafické zobrazení rovnice  $v = V_{DC} + v_{ac}$  vyjadřující rozklad okamžitých hodnot periodické veličiny na složky: stejnosměrnou a střídavou.

### □ Stejnosměrná složka

Amplitudu stejnosměrné složky jednoznačně stanovíme jako střední hodnotu na periodě skalárního součinu okamžitých hodnot veličiny  $v$  a okamžitých hodnot prvku  $\cos k\omega t = 1$  (pro  $k = 0$ ) vektoru báze funkcí z výrazu

$$V_{DC} = \frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v \cdot 1 \cdot dt.$$

### □ Střídavá složka

Okamžité hodnoty střídavé složky periodické veličiny  $v_{ac}$  lze jednoznačně vymežit po stanovení stejnosměrné složky algebraickým rozdílem okamžitých hodnot periodické veličiny a hodnoty stejnosměrné složky rovnici

$$v_{ac} = v - V_{DC}.$$



### Otázky 3.1.

1. Napište výraz pro vyjádření okamžitých hodnot periodické veličiny  $v$  algebraickým součtem okamžitých hodnot stejnosměrné složky  $V_{DC}$  a okamžitých hodnot střídavé složky  $v_{ac}$
2. Formulujte slovně matematický výraz
3.  $v = V_{DC} + v_{ac}.$
4. Formulujte slovně matematický výraz pro výpočet stejnosměrné složky periodické veličiny
5.  $V_{DC} = \frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v \cdot 1 \cdot dt.$
6. Napište matematický výraz pro výpočet okamžitých hodnot střídavé složky periodické veličiny.
7. Formulujte slovně matematický výraz pro výpočet okamžitých hodnot střídavé složky periodické veličiny.
8. Napište vztah mezi hodnotou periody a kmitočtu.



### Úlohy k řešení 3.1.

1. Odečtete dobu periody a počet period zobrazené veličiny v obr. 3.1.
2. Odečtete minimální a maximální hodnotu veličiny v obr. 3.1.
3. Rozhodněte, zda amplituda, efektivní hodnota a okamžité hodnoty stejnosměrné složky např. v obr. 3.1 vykazují stejnou hodnotu.
4. Určete hodnotu amplitudy střídavé složky v obr. 3.1.



## KLÍČ K ŘEŠENÍ

1. V obr. 3.1 jsou zobrazeny tři periody o  $T = 200 \text{ ms}$ .
2. Veličina v obr. 3.1 má minimální hodnotu 0 a maximální hodnotu 2.
3. Amplituda, efektivní hodnota a okamžité hodnoty stejnosměrné složky ve všech případech vykazují stejnou hodnotu, v obr. 3.1 je to 1.
4. Amplituda střídavé složky v obr. 3.1 má hodnotu 1.

### 3.2. Efektivní hodnota



#### VÝKLAD

Účinnou (efektivní) hodnotu periodické veličiny  $V$  vypočítáme geometrickým součtem efektivní hodnoty stejnosměrné složky  $V_{\text{DC}}$  a efektivní hodnoty střídavé složky  $V_{\text{ac}}$

$$V = \sqrt{V_{\text{DC}}^2 + V_{\text{ac}}^2} ,$$

kde efektivní hodnotu střídavé složky definujeme výrazem

$$V_{\text{ac}} = \sqrt{\frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v_{\text{ac}}^2 \cdot dt} .$$

#### □ Vyhodnocení efektivních hodnot měřicími přístroji

Běžné měřicí přístroje (multimetry, ampérmetry, voltmetry) veličiny vzorkují a tabulkovým kalkulátorem počítají efektivní hodnoty. Na stejnosměrných rozsazích poskytují údaje o efektivní hodnotě stejnosměrné složky a na střídavých rozsazích o efektivní hodnotě střídavé složky. Informaci o efektivní hodnotě periodické funkce měřicí přístroje neposkytují, její hodnotu musíme vypočítat geometrickým součtem efektivních hodnot obou složek.

#### □ Numerický výpočet

Periodickou funkci v numerické matematice zapisujeme rovnicí

$$v(n) = v(n + cN) ,$$

kde  $n$  je pořadí vzorku a  $N$  perioda (počet vzorků na periodu).

V numerické matematice efektivní hodnotu veličiny definujeme na počtu vzorků periody  $N$  nebo jejich celočíselných násobcích  $cN$  výrazem

$$V = \sqrt{\frac{1}{cN} \sum_{n=a}^{n=a+cN} v_n^2} ,$$

Efektivní hodnotu stejnosměrné složky veličiny výrazem

$$V_{\text{DC}} = \frac{1}{cN} \sum_{n=a}^{n=a+cN} v_n ,$$

okamžité hodnoty střídavé složky

$$v_{ac} = v - V_{DC}$$

a její efektivní hodnotu

$$V_{ac} = \sqrt{\frac{1}{cN} \sum_{n=a}^{n=a+cN} v_{ac\ n}^2}.$$

Efektivní hodnotu veličiny pak stanovíme geometrickým součtem efektivní hodnoty stejnosměrné složky a efektivní hodnoty střídavé složky.



### Shrnutí pojmů 3.2.

Okamžité hodnoty periodické veličiny vyjadřujeme algebraickým součtem okamžitých hodnot stejnosměrné složky a okamžitých hodnot střídavé složky, zatímco efektivní hodnotu periodické veličiny vyjadřujeme geometrickým součtem efektivní hodnoty stejnosměrné složky a efektivní hodnoty střídavé složky.



### Otázky 3.2.

1. Napište výraz pro vyjádření efektivní hodnoty periodické veličiny  $V$  geometrickým součtem efektivní hodnoty stejnosměrné složky  $V_{DC}$  a efektivní hodnoty střídavé složky  $V_{ac}$ .
2. Formulujte slovně matematický výraz
3. 
$$V = \sqrt{V_{DC}^2 + V_{ac}^2}.$$
4. Napište rovnici periodické veličiny v numerické matematice.
5. Napište výraz pro výpočet efektivní hodnoty periodické veličiny v numerické matematice.
6. Napište výraz pro výpočet efektivní hodnoty stejnosměrné složky periodické veličiny v numerické matematice.
7. Napište výraz pro výpočet efektivní hodnoty střídavé složky periodické veličiny v numerické matematice.



### Úlohy k řešení 3.2.

1. Uveďte, jakou hodnotu poskytuje multimetr na stejnosměrném rozsahu.
2. Uveďte, jakou hodnotu poskytuje multimetr na střídavém rozsahu.
3. Vypočítejte efektivní hodnotu proudu, jestliže  $I_{DC} = 1 \text{ mA}$  a  $I_{ac} = 2 \text{ mA}$ .
4. Vypočítejte efektivní hodnotu napětí, jestliže voltmetr na stejnosměrném rozsahu udává hodnotu  $5 \text{ V}$  a na střídavém rozsahu  $25 \text{ V}$ .



## KLÍČ K ŘEŠENÍ

1. Multimetr na stejnosměrném rozsahu udává efektivní hodnotu stejnosměrné složky.
2. Multimetr na střídavém rozsahu udává efektivní hodnotu střídavé složky.
3.  $I = \sqrt{I_{DC}^2 + I_{ac}^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ mA}.$
4.  $U = \sqrt{U_{DC}^2 + U_{ac}^2} = \sqrt{5^2 + 25^2} = 5\sqrt{26} \doteq 25,5 \text{ V}.$

### 3.3. Odvození výpočtu efektivní hodnoty



## VÝKLAD

Účinnou (efektivní) hodnotu veličiny nelze nikdy změřit, ale pouze vypočítat skalárními součiny funkcí numericky nebo analyticky (v této kapitole použijeme analytický způsob výpočtu) podle definičního výrazu

$$V = \sqrt{\frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v^2 \cdot dt}$$

postupně v následujících krocích.

#### □ Kroky analytického výpočtu

1. krok: vymezíme okamžitou hodnotu veličiny algebraickým součtem stejnosměrné a střídavé složky rovnicí

$$v = V_{DC} + v_{ac},$$

2. krok: rovnici pro okamžitou hodnotu veličiny umocníme na druhou

$$v^2 = V_{DC}^2 + v_{ac}^2 + 2 \cdot V_{DC} v_{ac},$$

3. krok: druhou mocninu rovnice veličiny integrujeme na daném intervalu  $J \in \langle a, b \rangle$

$$\int_a^b v^2 \cdot dt = \int_a^b V_{DC}^2 \cdot dt + \int_a^b v_{ac}^2 \cdot dt + \int_a^b 2 \cdot V_{DC} v_{ac} \cdot dt,$$

4. krok: integrovanou druhou mocninu rovnice dělíme hodnotou integračního intervalu

$$\left( \int_a^b v^2 \cdot dt = \int_a^b V_{DC}^2 \cdot dt + \int_a^b v_{ac}^2 \cdot dt + \int_a^b 2 \cdot V_{DC} v_{ac} \cdot dt \right) \cdot \frac{1}{J},$$

5. krok: na periodě nebo jejich celočíselných násobcích odečteme z předchozího podílu hodnoty

$$\frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v^2 \cdot dt = \frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} V_{DC}^2 \cdot dt + \frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v_{ac}^2 \cdot dt + \frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} 2 \cdot V_{DC} v_{ac} \cdot dt, \quad (x)$$

ze kterých zjistíme, že

$$\int_a^{a+cT} 2V_{\text{DC}}v_{\text{ac}} \cdot dt = 0$$

a matematicky formulujeme slovy: skalární součin okamžitých hodnot stejnosměrné složky a střídavé složky je na celočíselných násobcích periody ortogonální. Potom rovnici (x)

$$\frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v^2 \cdot dt = \frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} V_{\text{DC}}^2 \cdot dt + \frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v_{\text{ac}}^2 \cdot dt + 0$$

zapišeme ve tvaru

$$V^2 = V_{\text{DC}}^2 + V_{\text{ac}}^2.$$

6. krok: předchozí rovnici odmocníme

$$V = \sqrt{V_{\text{DC}}^2 + V_{\text{ac}}^2}.$$

Poznámka: v popisu grafů pro skalární součin funkcí  $x$ ,  $y$  je možné používat pouze zápis  $(x, y)$

$$(x, y) = \int_a^b x \cdot y \cdot dt,$$

respektive pro jejich střední hodnoty na intervalu  $J$  zápis  $(x, y)/J$

$$(x, y)/J = \frac{1}{J} \int_a^b x \cdot y \cdot dt.$$



### Shrnutí pojmů 3.3.

Účinnou (efektivní) hodnotu periodické funkce nelze nikdy změřit, ale pouze vypočítat skalárními součiny funkcí na době periody, a to analyticky nebo numericky.



### Otázky 3.3.

1. Napište definiční výraz pro výpočet efektivní hodnoty periodické veličiny.
2. Uveďte kroky výpočtu efektivní hodnoty veličiny.
3. Vymezte, čím nahradíme integraci v numerické matematice.



### Úlohy k řešení 3.3.

1. Napište výraz pro výpočet efektivní hodnoty veličiny ze známých okamžitých hodnot stejnosměrné a střídavé složky veličiny.
2. Formulujte slovně matematický výraz

$$3. \quad \int_a^{a+cT} 2V_{\text{DC}}v_{\text{ac}} \cdot dt = 0.$$

4. Zapište matematickým výrazem slovní vyjádření: „Skalární součin okamžitých hodnot stejnosměrné složky a okamžitých hodnot střídavé složky periodické veličiny je na celočíselných násobcích periody ortogonální.“



### KLÍČ K ŘEŠENÍ

Odpovědi naleznete v předchozím oddílu „Kroky analytického výpočtu.“



### TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, článek 2.2.



### Studijní texty

[3] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 4.1.



### VIRTUÁLNÍ LABORATOŘ

Doplňující virtuální laboratoř:  
3\_1\_Harmonicka\_funkce.xls

## 4. VYJÁDŘENÍ STEJNOSMĚRNÉ SLOŽKY SOUČTEM ZÁKLADNÍ HARMONICKÉ A ZKRESLENÍ



**Čas ke studiu:** 1 hodina



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- vypočítat základní harmonické
- posoudit okamžité hodnoty zkreslení
- odvodit výpočet efektivní hodnoty zkreslení

### 4.1. Základní harmonická zkreslení



#### VÝKLAD

Pro mnohé aplikace v praxi je doporučeno (např. ve Standardu IEEE 1459-2000 a normě ČSN EN 61800-3.) vyjadřovat střídavou složku periodické veličiny pomocí základní (první) harmonické a zkreslení. Můžeme tak velmi účinně posuzovat např. zpětný vliv spotřebičů na původně harmonické průběhy napětí v sítích, zkreslení napětí generátorů apod.

#### □ Výpočet základní harmonické

Základní harmonickou identifikujeme harmonickou analýzou střídavé složky periodické veličiny  $v_{ac}$  určením amplitud  $A_{m1}$  a  $B_{m1}$ :

v analytické matematice pro proměnnou  $t$ :

$$A_{m1} = \frac{2}{T} \int_0^T v_{ac}(\omega t) \cdot \sin \omega t \cdot dt, \quad B_{m1} = \frac{2}{T} \int_0^T v_{ac}(\omega t) \cdot \cos \omega t \cdot dt,$$

v numerické matematice

$$A_{m1} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N v_{acn} \sin n \frac{2\pi}{N}, \quad B_{m1} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N v_{acn} \cos n \frac{2\pi}{N}.$$

Z vypočítaných hodnot amplitud  $A_{m1}$  a  $B_{m1}$  složek 1. harmonické funkce pak stanovíme amplitudu 1. harmonické funkce geometrickým součtem amplitud  $A_{m1}$  a  $B_{m1}$

$$\sqrt{A_{m1}^2 + B_{m1}^2} = C_{m1} = V_{m1}$$

a počáteční fázi

$$\psi_1 = \arctg \frac{B_{m1}}{A_{m1}}$$

a potom vyjádříme okamžité hodnoty základní harmonické výrazem

$$v_1 = V_{m1} \sin(\omega t + \Psi_1).$$

#### □ Okamžité hodnoty zkreslení

Okamžité hodnoty zkreslení  $v_z$  střídavé složky periodické veličiny  $v_{ac}$  lze jednoznačně analyticky vyjádřit algebraickým rozdílem okamžitých hodnot střídavé složky periodické veličiny  $v_{ac}$  a okamžitých hodnot základní harmonické periodické veličiny  $v_1$

$$v_z = v_{ac} - v_1.$$



#### Shrnutí pojmů 4.1

Jedině rovnicí  $v_z = v_{ac} - v_1$  jednoznačně definujeme zkreslení, ale rovnice sama o sobě vůbec neumožňuje posuzovat úroveň zkreslení. To je možné pouze grafickým zobrazením okamžitých hodnoty zkreslení, které posuzujeme expertně očima. Grafické zobrazení lze získat pouze aplikací tabulkových kalkulačků.



#### Otázky 4.1.

1. Vyjádřete slovně definici okamžitých hodnot zkreslení střídavé složky periodické veličiny.
2. Napište rovnici pro okamžité hodnoty zkreslení střídavé složky periodické veličiny.
3. Napište rovnici pro okamžité hodnoty základní harmonické periodické veličiny.



#### Úlohy k řešení 4.1.

1. Vymezte způsob určení parametrů základní harmonické periodické veličiny.
2. Rozhodněte, jakým způsobem lze posuzovat okamžité hodnoty zkreslení.
3. Uveďte nástroj pro zobrazení průběhů zkreslení.



#### KLÍČ K ŘEŠENÍ

1. Nejdříve z grafického zobrazení průběhu střídavé složky periodické veličiny odečteme dobu periody  $T$  a stanovíme hodnotu úhlové rychlosti  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Pak harmonickou analýzou (v prostředí tabulkového kalkulačků) určíme hodnoty amplitud  $A_{m1}$ ,  $B_{m1}$  a z nich hodnotu amplitudy  $C_{m1}$  a počáteční fáze  $\Psi_1$ .
2. Zobrazíme okamžité hodnoty zkreslení a posuzujeme je expertně očima.
3. Nástrojem zobrazení okamžitých hodnot zkreslení podle definičního výrazu je tabulkový kalkulač.

## 4.2. Efektivní hodnota zkreslení



### VÝKLAD

Efektivní hodnotu zkreslení  $V_z$  střídavé složky periodické veličiny  $V_{ac}$  lze jednoznačně analyticky vyjádřit geometrickým rozdílem efektivní hodnoty střídavé složky periodické veličiny  $V_{ac}$  a efektivní hodnoty základní harmonické periodické veličiny  $V_1$

$$V_z = \sqrt{V_{ac}^2 - V_1^2},$$

### □ Činitel celkového harmonického zkreslení

V praxi je doporučeno posuzovat úroveň zkreslení činitelem celkového harmonického zkreslení (total harmonic distortion – THD) viz Standard IEEE 1459-2000, norma ČSN EN 61800-3.

Pro automatizované posuzování úrovně zkreslení je definován činitel celkového harmonického zkreslení  $THD = 100 \cdot \frac{V_z}{V_1}$  (%).



### Shrnutí pojmů 4.2

Podle norem je úroveň zkreslení posuzována hodnotou činitele celkového harmonického zkreslení (THD), která je udávána v procentech podílu efektivní hodnoty zkreslení a efektivní hodnoty základní harmonické.



### Otázky 4.2.

1. Napište rovnici vymežující celkový činitel harmonického zkreslení (THD).
2. Vyjádřete slovně definici celkového činitele harmonického zkreslení. (THD).
3. Napište rovnici pro výpočet efektivní hodnoty zkreslení.
4. Formulujte slovně rovnici pro výpočet efektivní hodnoty zkreslení.



### Úlohy k řešení 4.2.

1. Vypočítejte hodnotu THD napětí, je-li efektivní hodnota střídavé složky napětí  $U_{ac} = 100$  V a efektivní hodnota základní harmonické napětí  $U_1 = 80$  V.
2. Rozhodněte, jakým geometrickým útvarem zobrazíme rovnici pro výpočet efektivní hodnoty zkreslení definované geometrickým rozdílem efektivní hodnoty střídavé složky a efektivní hodnoty základní harmonické.
3. Zobrazte graficky rovnici pro výpočet efektivní hodnoty zkreslení, je-li  $U_{ac} = 100$  V a  $U_1 = 80$  V.

4. Vypočítejte efektivní hodnotu zkreslení proudu, je-li efektivní hodnota střídavé složky proudu je 100 mA a efektivní hodnota jeho základní harmonické 96 mA .



### KLÍČ K ŘEŠENÍ

1.  $THD = 100 \cdot \frac{V_z}{V_1} = 100 \cdot \frac{\sqrt{V_{ac}^2 - V_1^2}}{V_1} = 100 \cdot \sqrt{\frac{V_{ac}^2}{V_1^2} - 1} = 100 \cdot \sqrt{\left(\frac{100}{80}\right)^2 - 1} = 75 \%$ .
2. Rovnici pro výpočet efektivní hodnoty zkreslení je tzv. Pythagorova věta, kterou graficky zobrazuje pravoúhlým trojúhelníkem.
3. Hodnota přepony pravoúhlého trojúhelníka je  $U_{ac} = 100 \text{ V}$ , hodnota jedné odvěsny  $U_1 = 80 \text{ V}$ , z nich vypočítáme hodnotu druhé odvěsny  $U_z = \sqrt{U_{ac}^2 - U_1^2} = \sqrt{100^2 - 80^2} = 60 \text{ V}$ . Zvolíme vhodné měřítko, např.  $m_U = 10 \text{ V/dílek}$  a zkonstruujeme pravoúhlý trojúhelník.
4.  $I_z = \sqrt{I_{ac}^2 - I_1^2} = \sqrt{100^2 - 96^2} = 28 \text{ mA}$ .

### 4.3. Odvození výpočtu efektivní hodnoty zkreslení



#### VÝKLAD

Efektivní hodnotu zkreslení nelze nikdy změřit, ale pouze vypočítat skalárními součiny funkcí analyticky podle definičního výrazu

$$V_z = \sqrt{\frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v_z^2 \cdot dt}$$

v krocích.

#### □ Kroky výpočtu

1. krok: vymezíme rovnici pro okamžitou hodnotu zkreslení veličiny algebraickým rozdílem okamžitých hodnot střídavé složky a okamžitých hodnot základní harmonické

$$v_z = v_{ac} - v_1,$$

2. krok: rovnici pro okamžitou hodnotu zkreslení veličiny umocníme na druhou

$$v_z^2 = v_{ac}^2 + v_1^2 - 2 \cdot v_{ac} v_1,$$

3. krok: druhou mocninu rovnice zkreslení veličiny integrujeme na daném intervalu

$$J \in \langle a, a + cT \rangle$$

$$\int_a^{a+cT} v_z^2 \cdot dt = \int_a^{a+cT} v_{ac}^2 \cdot dt + \int_a^{a+cT} v_1^2 \cdot dt - \int_a^{a+cT} 2 \cdot v_{ac} v_1 \cdot dt,$$

4. krok: integrovanou druhou mocninu rovnice zkreslení veličiny dělíme hodnotou integračního intervalu

$$\left( \int_a^{a+cT} v_z^2 \cdot dt = \int_a^{a+cT} v_{ac}^2 \cdot dt + \int_a^{a+cT} v_1^2 \cdot dt - \int_a^{a+cT} 2 \cdot v_{ac} v_1 \cdot dt \right) \cdot \frac{1}{J}$$

5. krok: na periodě nebo jejich celočíselných násobcích odečteme z předchozího podílu hodnoty

$$\frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v_z^2 \cdot dt = \frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v_{ac}^2 \cdot dt + \frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v_1^2 \cdot dt - \frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} 2 \cdot v_{ac} v_1 \cdot dt, (x)$$

ze kterých zjistíme, že

$$\int_a^{a+cT} 2 \cdot v_{ac} v_1 \cdot dt = 0$$

a formulujeme slovy: skalární součin okamžitých hodnot střídavé složky a okamžitých hodnot základní harmonické je na celočíselných násobcích periody ortogonální. Potom rovnici (x)

$$\frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v_z^2 \cdot dt = + \frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v_{ac}^2 \cdot dt + \frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v_1^2 \cdot dt - 0$$

zapišeme ve tvaru

$$V_z^2 = V_{ac}^2 + V_1^2$$

5. krok: předchozí rovnici odmocníme

$$V_z = \sqrt{V_{ac}^2 + V_1^2}$$

Při výpočtech v numerické matematice nahradíme integrály sumou.



### Shrnutí pojmů 4.3.

Rovnici pro efektivní hodnotu zkreslení veličiny získáme integrální transformací rovnice pro okamžité hodnoty zkreslení veličiny.



### Otázky 4.3.

1. Napište výraz pro výpočet efektivní hodnoty zkreslení ze známých okamžitých hodnot zkreslení.
2. Uveďte kroky výpočtu efektivní hodnoty zkreslení.
3. Vymezte, čím nahradíme integraci v numerické matematice.



### Úlohy k řešení 4.3.

1. Napište výraz pro výpočet efektivní hodnoty ze známých okamžitých hodnot střídavé složky veličiny a okamžitých hodnot její základní harmonické.
2. Formulujte slovně matematický výraz

3. 
$$\int_a^{a+cT} 2 \cdot v_{ac} v_1 \cdot dt = 0$$

4. Zapište matematickým výrazem slovní vyjádření: „Skalární součin okamžitých hodnot střídavé složky a okamžitých hodnot základní harmonické je na celočíselných násobcích periody ortogonální.“



### KLÍČ K ŘEŠENÍ

Odpovědi naleznete v předchozí kapitole „Kroky výpočtu.“



### TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] IEEE Trial-Use Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions. 44 p. IEEE Std 1459-2000 New York 2000, ISBN 0-7381-1962-8.



### Studijní texty

[1] ČSN EN 61800-3: Systémy elektrických výkonových pohonů s nastavitelnou rychlostí – Část 3: EMC – norma výrobku zahrnující specifické zkušební metody. Český normalizační institut Praha 1998.



### VIRTUÁLNÍ LABORATOŘE

Doplňující virtuální laboratoře:

4\_1\_Frekvenční\_charakteristiky.xls

4\_2\_Harmonická\_funkce.xls

## 5. FYZIKÁLNÍ MODEL KONDENZÁTORU



**Čas ke studiu:** 1 hodina



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- rozlišit sériové a paralelní zapojení
- rozlišit typy Coulombových charakteristik

### 5.1. Polarizace dielektrika



#### VÝKLAD

Pohyb vázaných částic s náboji v izolantech při účincích elektrického pole, jejich vychýlení z rovnovážných poloh na ohraničenou malou vzdálenost, jakož i orientace dipólových molekul nazýváme polarizací dielektrika.

#### □ Relativní permitivita

Míru polarizace dielektrika hodnotíme podle zvětšení kapacity kondenzátoru při záměně vakua nebo vzduchu mezi deskami kondenzátoru daným materiálem. Podíl kapacity  $C$  kondenzátoru s daným dielektrikem a kapacity kondenzátoru  $C_0$  s vakuem nazýváme relativní permeabilitou (dielektrickou konstantou)

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0},$$

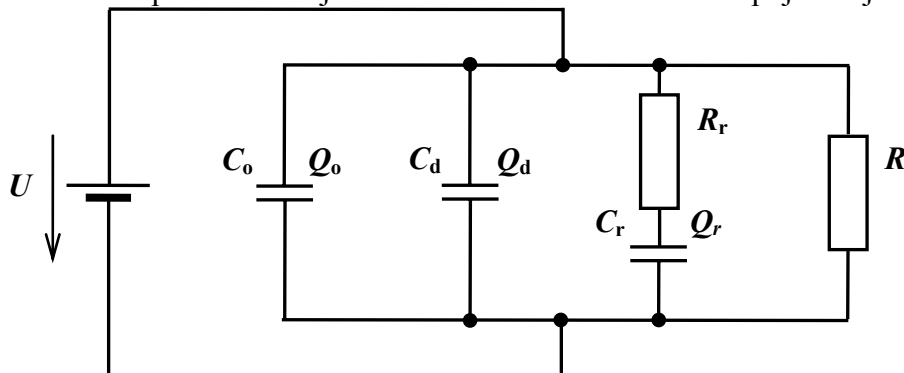
přičemž permitivita vakua má hodnotu  $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$ . V praxi uvažujeme stejnou hodnotu i pro permitivitu vzduchu.

**Tab. 5.1** Hodnoty dielektrických konstant vybraných látek.

| Látka                     | $\varepsilon_r$ ( - ) |
|---------------------------|-----------------------|
| vakuum                    | 1                     |
| vzduch                    | 1,0006                |
| destilovaná voda          | 80                    |
| papír                     | 1,8 až 2,6            |
| tvrdý papír               | 3,5 až 6              |
| dřevo                     | 3,0 až 3,5            |
| hlína                     | 4 až 10               |
| keramika                  | 2 až 60               |
| speciální keramické hmoty | 2 až 3000             |

### □ Náhradní schéma kondenzátoru

Velikost kapacity kondenzátoru s dielektrikem a na něm nahromaděný elektrický náboj jsou podmíněny souhrnem různých druhů polarizace. V jednom materiálu se může vyskytnout i několik druhů polarizace najednou. Ilustračním náhradním zapojením je schéma na *obr. 5.1*



**Obr. 5.1** Náhradní schéma kondenzátoru.

$C_0$ ,  $Q_0$  reprezentují vakuum (vzduch);

$C_d$ ,  $Q_d$  reprezentují deformační (pružné) polarizace, které se vyznačují tím, že vázané elektrické náboje jsou vázány pružnými elektrostatickými silami. Proto jejich vychýlení způsobené vnějším elektrickým polem, jakož i návrat do původní polohy po zániku pole v materiálu se odehrává velmi rychle, prakticky okamžitě ( $10^{-13}$  až  $10^{-15}$  s), což dokazuje skutečnost, že nejsou spojeny s dielektrickými ztrátami;

$C_r$ ,  $Q_r$  reprezentují relaxační polarizace, které se vyznačují podstatně delší dobou polarizace (relaxační dobou), protože dochází k přeskupování částic spojených s tepelným pohybem, dochází i k dielektrickým ztrátám, jež jsou reprezentovány odporem  $R_r$ ;

$R$  reprezentuje odpor izolace při stejnosměrném napětí.

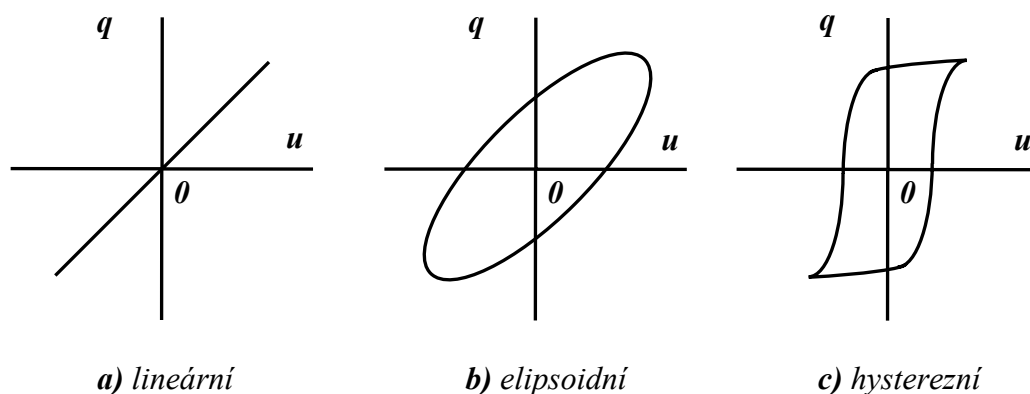
### □ Typy Coulombvoltových charakteristik

Závislost elektrického náboje na napětí nazýváme Coulombvoltovou charakteristikou, rozlišujeme tři základní typy charakteristik:

a) lineární-jestliže je polarizační složka dielektrických ztrát prakticky nulová, pak je náboj lineárně závislý na napětí *obr. 5.2a*);

b) elipsoidní-vyskytuje-li se v dielektriku některá z pomalejších polarizací, tj. polarizace náboje je spojená se ztrátami, potom křivka závislosti náboje na napětí má tvar elipsoidu, jehož plocha je úměrná množství energie, která se za dobu jedné periody napětí přemění na teplo *obr.5.2b*);

c) hysterezní-jestliže dielektrikum kondenzátoru je tvořeno seignetoelektrickým (feroelektrickým) materiálem, potom křivka  $q(u)$  má hysterezní tvar. I v tomto případě je plocha křivky úměrná ztrátám energie za jednu periodu napětí *obr.5.2c*).



Obr. 5.2 Typy Coulombvoltových charakteristik.

**Shrnutí pojmů 5.1.**

Míru polarizace dielektrika kondenzátoru posuzujeme hodnotou relativní permitivity. Každý kondenzátor charakterizujeme závislosti náboje na napětí tzv. Coulombvoltovou charakteristikou, která může být lineární nebo nelineární s hystezí.

**Otázky 5.1.**

1. Definujte relativní permitivitu.
2. Fyzikálně odůvodněte význam odporu  $R$  a odporu  $R_r$ .
3. Rozlište význam kapacity  $C_d$  a kapacity  $C_r$ .
4. Vymezte společnou veličinu sériového zapojení stejnosměrného zdroje napětí a dvou kapacitorů.
5. Vymezte společnou veličinu paralelního zapojení stejnosměrného zdroje napětí a dvou kapacitorů.
6. Vymezte společnou veličinu po připojení kapacitoru s nábojem ke kapacitoru bez náboje.

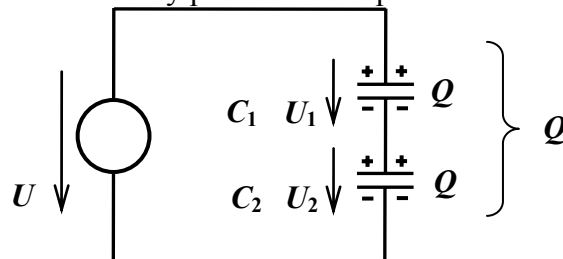
**Úlohy k řešení 5.1.**

1. Nakreslete schéma sériového zapojení stejnosměrného zdroje a dvou kapacitorů a analyzujte v něm proud, náboje, napětí a energie kapacitorů.
2. Nakreslete schéma paralelního zapojení stejnosměrného zdroje a dvou kapacitorů a analyzujte v něm proud, náboje, napětí a energie kapacitoru.
3. Nakreslete schéma připojení kapacitoru s nábojem ke kapacitoru bez náboje a analyzujte obvod.
4. Porovnejte hodnoty energií kapacitorů před připojením a po připojení.
5. Odůvodněte vypočítané hodnoty energií kapacitorů.



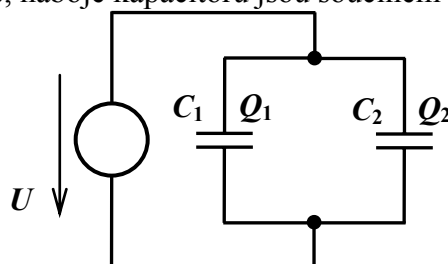
## KLÍČ K ŘEŠENÍ

1. Schéma zapojení je na obr. 5.3. Při napájení ze stejnosměrného zdroje napětí kapacitorky prochází proud pouze bezprostředně po připojení zdroje, náboj je integrálem proudu, proto na každém kapacitoru je stejný náboj stejně jako náboj na jejich sériovém zapojení, napětí kapacitoru jsou podílem náboje a kapacity, hodnota energie je jedna polovina součinu kapacity a druhé mocniny příslušného napětí.



Obr. 5.3 Sériové zapojení zdroje a dvou kapacitorů.

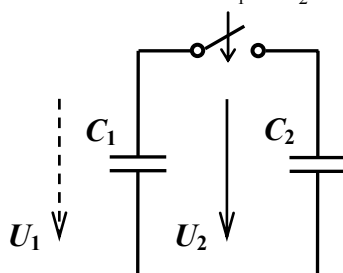
2. Schéma zapojení je na obr. 5.4. Při napájení ze stejnosměrného zdroje napětí kapacitorky prochází proud pouze bezprostředně po připojení zdroje, napětí kapacitorů je stejné a rovná se napětí zdroje, náboje kapacitoru jsou součinem kapacity a napětí.



Obr. 5.4 Paralelní zapojení zdroje a dvou kapacitorů.

3. Schéma zapojení je na obr. 5.5. Před připojením kapacitoru (např. s kapacitou  $C_2$ ) bez náboje ke kapacitoru  $C_1$  s nábojem  $Q$  má kapacitor  $C_1$  napětí  $U_1$ . Po připojení se náboj  $Q$  rozdělí na náboje  $Q_1$  a  $Q_2$ , přičemž napětí obou kapacitorů je stejné (např.  $U_2$ ). Jeho hodnotu odvodíme z rovnice

$$Q = C_1 U = Q_1 + Q_2 = C_1 U_2 + C_2 U_2 \Rightarrow U_2 = U \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

Obr. 5.5 Schéma připojení nenabitěho kapacitoru  $C_2$  k nabitěmu kapacitoru  $C_1$ .

4. Hodnotu energie kapacitoru  $C_1$  před připojením ke kapacitoru  $C_2$  stanovíme z výrazu

$$W = \frac{1}{2} C_1 U^2.$$

Po připojení  $C_1$  k  $C_2$  vykazují oba kapacitory energii

$$W' = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} U^2 (C_1 + C_2) = \frac{1}{2} U^2 \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} (C_1 + C_2).$$

Hodnotu energií před a po připojení budeme diskutovat úpravou vztahu

$$\frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} (C_1 + C_2) = C_1 \frac{C_1 (C_1 + C_2)}{(C_1 + C_2) \cdot (C_1 + C_2)} = C_1 \frac{C_1}{(C_1 + C_2)}.$$

Jelikož pro  $C_2 > 0$  je výraz

$$\frac{C_1}{(C_1 + C_2)} < 1.$$

Je i hodnota energie po připojení  $C_1$  k  $C_2$  menší než hodnota energie před připojením, tj.

$$W' < W.$$

5. Úbytek energie je možné odůvodnit ztrátami při procesu připojování, např. hořením oblouku popřípadě ztrátami na spínacím polovodičovém prvku.



## TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, článek 2.2.

[2] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů II. Skriptum ČVUT Praha 2004, článek 6. 1., 6. 2.



## Studijní texty

[3] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 4.1.



## Zadání samostatné práce č. 1:

Odvoďte výraz pro celkovou kapacitu smíšeného zapojení čtyř kapacitorů, z nichž dva jsou zapojeny sériově a dva paralelně.

## 6. POPIS ZDROJŮ



**Čas ke studiu:** 1 hodina



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- rozlišit zdroj proudu a zdroj napětí
- specifikovat zdroj proudu
- specifikovat zdroj napětí

### 6.1. Parametry zdrojů

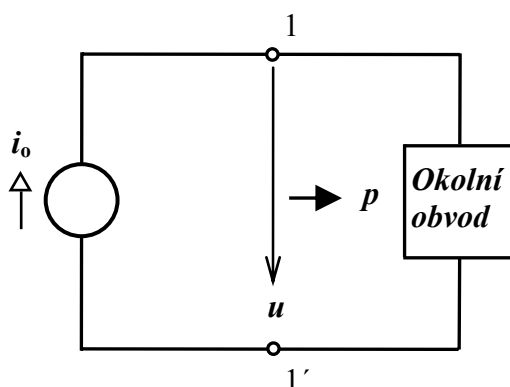


#### VÝKLAD

Zdrojem modelujeme přeměnu jiné energie na energii elektromagnetickou. Rozlišujeme zdroj proudu a zdroj napětí.

#### □ Vlastnosti zdroje proudu

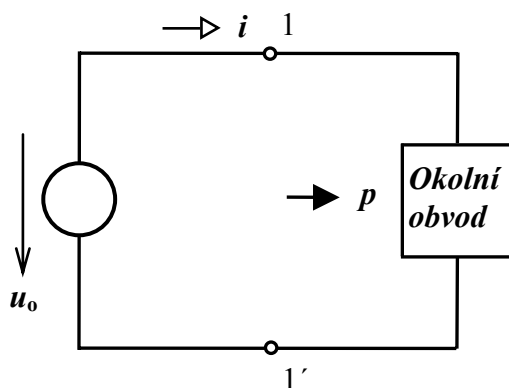
Parametrem zdroje proudu je proud. Schématickou značkou zdroje proudu je kružnice s orientovanou šipkou proudu, jehož okamžité hodnoty označujeme  $i_o$  nebo také  $i_s, i_i$ . Zdroj proudu vnutí okolnímu obvodu proud a okolní obvod vnutí zdroji proudu napětí a výkon. Zdroj proudu není schopen sdílet proud jiného zdroje, pro každý jiný zdroj se chová jako stav naprázdno.



**Obr. 6.1** Zdroj proudu napájící okolní obvod.

#### □ Vlastnosti zdroje napětí

Parametrem zdroje napětí je napětí. Schématickou značkou zdroje napětí je kružnice s orientovanou šipkou napětí, jehož okamžité hodnoty označujeme  $u_o$ , nebo také  $u_i$ . Zdroj napětí vnutí okolnímu obvodu napětí a okolní obvod vnutí zdroji napětí proud a výkon. Zdroj napětí není schopen sdílet napětí jiného zdroje, pro každý jiný zdroj se chová jako stav nakrátko.



Obr. 6.2 Zdroj napětí napájející okolní obvod.

### □ Okamžité hodnoty výkonu

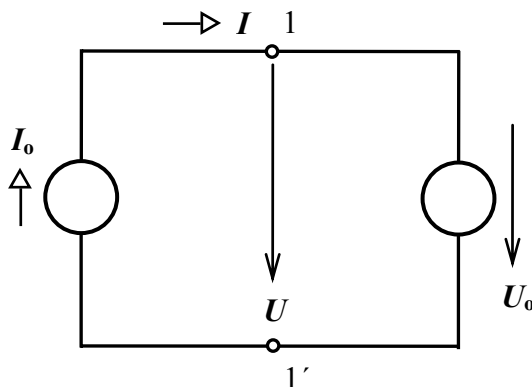
Okamžité hodnoty výkonu jsou součinem okamžitých hodnot napětí a okamžitých hodnot proudu

$$p = u \cdot i .$$

Při souhlasné orientaci počítacích šipek okamžitých hodnot napětí a proudu jsou hodnoty okamžitých výkonů kladné a zařízení se chová jako spotřebič energie. Při nesouhlasné orientaci počítacích šipek okamžitých hodnot napětí a proudu jsou hodnoty okamžitých výkonů záporné a zařízení se chová jako zdroj energie.

### Příklad 6.1.

Vyšetřete proud, napětí, výkon a rozhodněte, který zdroj se chová jako spotřebič energie v kaskádním zapojení zdroje stejnosměrného proudu  $I_0 = 2 \text{ A}$  a zdroje stejnosměrného napětí  $U_0 = 6 \text{ V}$  na obr. 6.3.



Obr. 6.3 Kaskádní zapojení zdroje stejnosměrného proudu a zdroje stejnosměrného napětí.



**Řešení:** Kaskádní zapojení prvků je charakteristické společným proudem a společným napětím. Zdroj proudu vnutí obvodu proud

$$I = I_0 = 2 \text{ A}$$

a zdroj napětí vnutí obvodu napětí

$$U = U_0 = 6 \text{ V} .$$

Zdroj proudu vykazuje v daném případě nesouhlasnou orientaci počítací šipky proudu  $I_o$  a počítací šipky svorkového napětí  $U$ , proto je jeho okamžitý výkon záporný, zatímco zdroj napětí vykazuje v daném případě souhlasnou orientaci počítací šipky napětí  $U_o$  a počítací šipky proudu  $I$ , proto je jeho okamžitý výkon kladný. V daném případě zdroj napětí odebírá ze zdroje proudu výkon

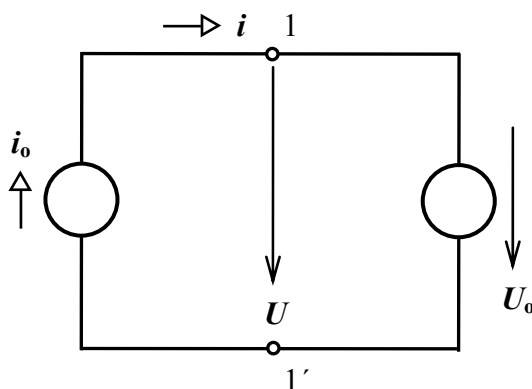
$$P = U_o I = 6.2 = 12 \text{ W}.$$

Řešení obvodu vyhovuje Tellegenově větě

$$-I_o U + I U_o = -2.6 + 2.6 = 0.$$

### Příklad 6.2.

Vyšetřete proud, napětí, výkon a rozhodněte, který zdroj se chová jako spotřebič energie v kaskádním zapojení zdroje harmonického proudu  $i_o = 2 \sin \omega t \text{ A}$  a zdroje stejnosměrného napětí  $U_o = 3 \text{ V}$  na obr. 6.4.



**Obr. 6.4** Kaskádní zapojení zdroje harmonického proudu a zdroje stejnosměrného napětí.



**Řešení:** Kaskádní zapojení prvků je charakteristické společným proudem a společným napětím. Zdroj proudu vnutí obvodu harmonický průběh proudu

$$i = i_o = 2 \sin \omega t \text{ A}$$

a zdroj napětí vnutí obvodu stejnosměrné napětí

$$U = U_o = 3 \text{ V}.$$

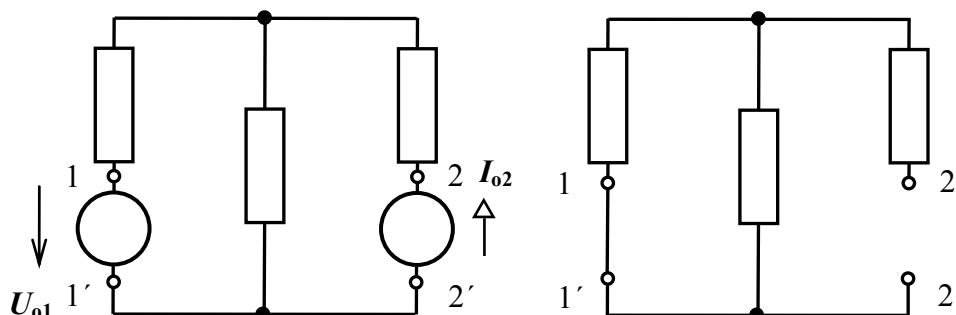
Zdroj proudu vykazuje nesouhlasnou orientaci počítací šipky proudu  $i_o$  a počítací šipky svorkového napětí  $U$ , proto je jeho okamžitý výkon záporný pro  $\sin \omega t > 0$ , kladný pro  $\sin \omega t < 0$  a nulový pro  $\sin \omega t = 0$ . Kdežto zdroj napětí vykazuje souhlasnou orientaci počítací šipky napětí  $U_o$  a počítací šipky proudu  $i$ , proto je jeho okamžitý výkon kladný pro  $\sin \omega t > 0$ , záporný pro  $\sin \omega t < 0$  a nulový pro  $\sin \omega t = 0$ . V daném případě zdroj stejnosměrného napětí odebírá ze zdroje proudu výkon v první polovině harmonického průběhu proudu, zatímco v druhé polovině harmonického průběhu proudu je tomu naopak.

Řešení obvodu vyhovuje Tellegenově větě

$$-i_o U + i U_o = -2.3 \sin \omega t + 2.3 \sin \omega t = 0.$$

### □ Vyjmutí zdrojů

Často při analýzách obvodu je nezbytné vyjmout zdroje energie ze schématu zapojení. Po vyjmutí zdrojů svorky zdrojů proudu necháme rozpojené a svorky zdrojů napětí nahradíme zkratem, tak jak je ukázáno na obr. 6.5.



a) obvod se zdrojem napětí a zdrojem proudu

b) obvod po vyjmutí zdroje napětí a zdroje proudu

**Obr. 6.5** Vyjmutí zdroje napětí a zdroje proudu z obvodu.

Řízené zdroje nelze z obvodu v žádném případě vyjímat, neboť jejich působení musí zůstat zachováno při zjišťování dílčích účinků každého nezávislého zdroje.



### Shrnutí pojmů 6.1.

Zdrojem modelujeme přeměnu jiné energie na energii elektromagnetickou. Rozlišujeme zdroj proudu a zdroj napětí.

Zdroj proudu vnutí okolnímu obvodu proud a okolní obvod mu vnutí napětí a výkon. Zdroj proudu nesdílí proud jiného zdroje.

Zdroj napětí vnutí okolnímu obvodu napětí a okolní obvod mu vnutí proud a výkon. Zdroj napětí nesdílí napětí jiného zdroje.

Je-li okamžitý výkon zdroje kladný, chová se jako spotřebič, je-li okamžitý výkon zdroje záporný, chová se jako zdroj.



### Otázky 6.1.

1. Napište výraz pro vyjádření okamžitých hodnot periodické veličiny  $v$  algebraickým součtem okamžitých hodnot stejnosměrné složky  $V_{DC}$  a okamžitých hodnot střídavé složky  $v_{ac}$ .
2. Formulujte slovně matematický výraz  

$$v = V_{DC} + v_{ac}.$$
3. Formulujte slovně matematický výraz pro výpočet stejnosměrné složky periodické veličiny

$$V_{\text{DC}} = \frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v.l. dt .$$

4. Napište matematický výraz pro výpočet okamžitých hodnot střídavé složky periodické veličiny.
5. Formulujte slovně matematický výraz pro výpočet okamžitých hodnot střídavé složky periodické veličiny.
6. Napište vztah mezi hodnotou periody a kmitočtu.



### Úlohy k řešení 6.1.

1. Odečtete dobu periody a počet period zobrazené veličiny v obr. 1.1.
2. Odečtete minimální a maximální hodnotu veličiny v obr. 1.1.
3. Rozhodněte, zda amplituda, efektivní hodnota a okamžité hodnoty stejnosměrné složky např. v obr. 1.1 vykazují stejnou hodnotu.
4. Určete hodnotu amplitudy střídavé složky v obr. 1.1.



### KLÍČ K ŘEŠENÍ

1. V obr. 1.1 jsou zobrazeny tři periody o  $T = 200 \text{ ms}$ .
2. Veličina v obr. 1.1 má minimální hodnotu 0 a maximální hodnotu 2.
3. Amplituda, efektivní hodnota a okamžité hodnoty stejnosměrné složky ve všech případech vykazují stejnou hodnotu, v obr. 1.1 je to 1.
4. Amplituda střídavé složky v obr. 1.1 má hodnotu 1.



### TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, článek 2.2.



### Studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 4.1.

## 7. POPIS GENERÁTORŮ



**Čas ke studiu:** 1 hodina



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- rozlišit paralelní a sériový model
- aplikovat princip duality
- řešit soustavy rovnic Cramerovým pravidlem

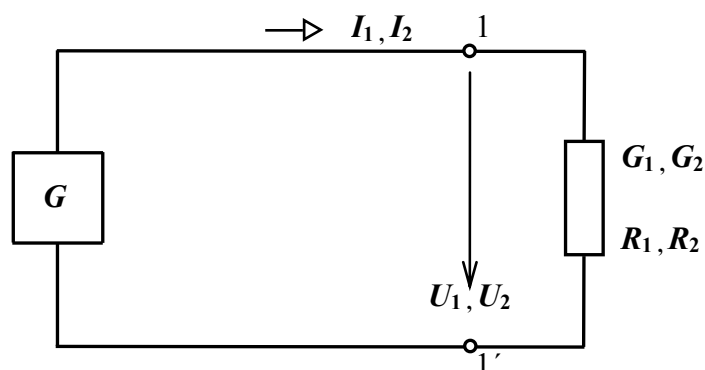
### 7.1. Parametry generátoru



#### VÝKLAD

Generátor je reálný obvodový prvek, který modelujeme zdrojem a imitancí.

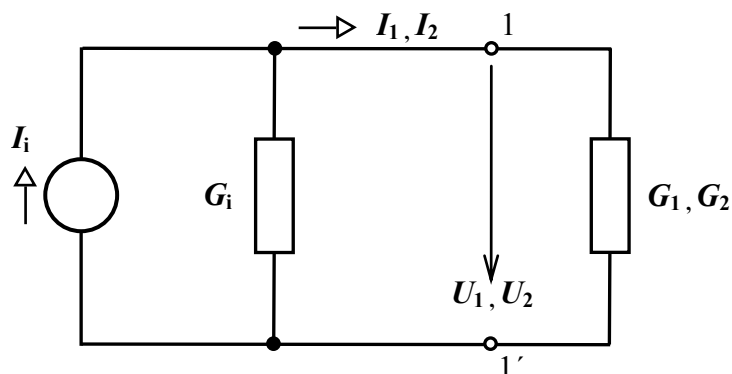
Ve stejnosměrných obvodech s lineárními hodnotami parametrů lze jednoznačně určit parametry generátoru ze dvou různých známých svorkových hodnot proudů  $I_1, I_2$  a napětí  $U_1, U_2$  svorek 1,1' zatížených dvěma různými hodnotami vodivosti nebo odporů rezistoru, obr. 7.1.



**Obr. 7.1** Schéma zapojení generátoru a dvou hodnot rezistoru spotřebiče.

#### □ Paralelní model

Paralelní model generátoru modelujeme proudem zdroje s parametrem  $I_i$  a vodivostí rezistoru s parametrem  $G_i$ , viz obr. 7.2.



**Obr. 7.2** Schéma zapojení paralelního modelu generátoru a dvou hodnot vodivostí rezistoru.

Pro dvě neznámé hodnoty parametrů pak snadno sestavíme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} I_i - G_i U_1 &= I_1 & (1) \\ I_i - G_i U_2 &= I_2 & (2) \end{aligned} \quad (x)$$

Rovnice můžeme řešit postupným vyloučením (eliminací) neznámých.

Proud  $I_i$  vyloučíme tak, že rovnice (1), (2) odečteme a následnou úpravou získáme pro určení hodnoty vodivosti rezistoru výraz

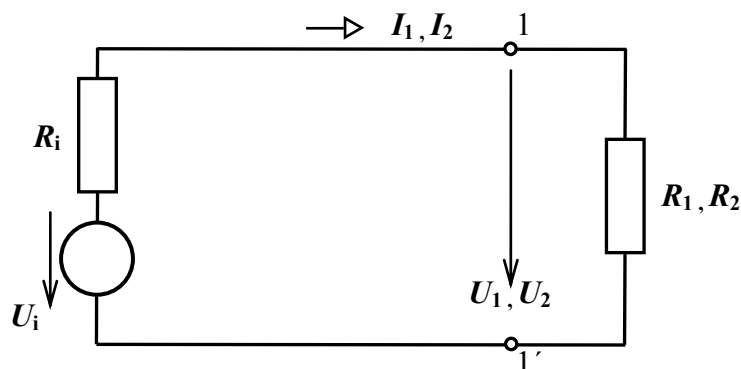
$$G_i = \frac{I_1 - I_2}{U_2 - U_1}.$$

Vodivost  $G_i$  vyloučíme tak, že rovnici (1) vynásobíme napětím  $U_2$ , rovnici (2) vynásobíme napětím  $U_1$ , rovnice odečteme a po úpravě získáme pro určení hodnoty proudu zdroje výraz

$$I_i = \frac{I_1 U_2 - I_2 U_1}{U_2 - U_1}.$$

#### □ Sériový model

Sériový model generátoru modelujeme napětím zdroje s parametrem  $U_i$  a odporem rezistoru s parametrem  $R_i$ , viz obr. 7.3.



**Obr. 7.3** Schéma zapojení sériového modelu generátoru a dvou hodnot odporů rezistoru.

Pro dvě neznámé hodnoty parametrů pak snadno sestavíme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} U_i - R_i I_1 &= U_1 & (1) \\ U_i - R_i I_2 &= U_2 & (2) \end{aligned} \quad (xx)$$

Neznámé hodnoty parametrů sériového modelu generátoru určíme eliminací neznámých.

Napětí  $U_i$  vyloučíme tak, že rovnice (1), (2) odečteme a následnou úpravou získáme pro určení hodnoty odporu rezistoru výraz

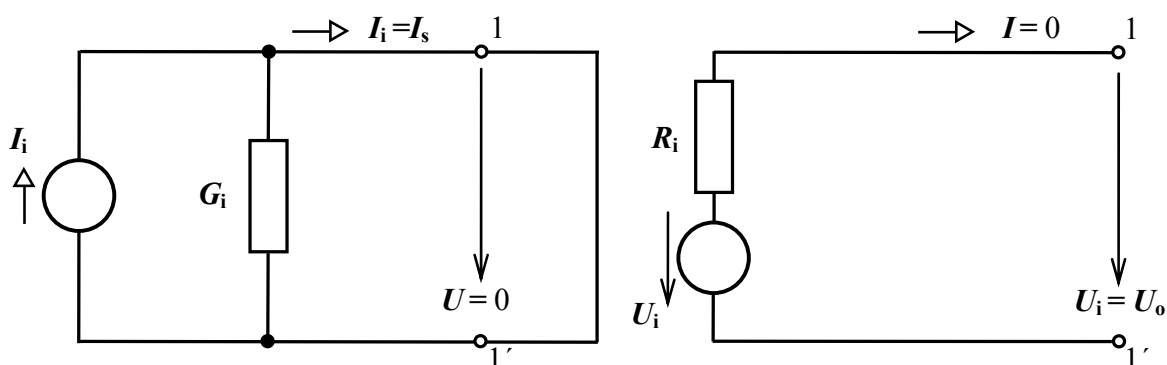
$$R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1}.$$

Odpor  $R_i$  vyloučíme tak, že rovnici (1) vynásobíme proudem  $I_2$ , rovnici (2) vynásobíme proudem  $I_1$ , rovnice odečteme a po úpravě získáme pro určení hodnoty napětí zdroje výraz

$$U_i = \frac{U_1 I_2 - U_2 I_1}{I_2 - I_1}.$$

#### □ Extrémní případ zatížení svorek

Extrémním případem zatížení svorek 1,1' je stav nakrátko ( $R=0$ ), obr. 7.4a) a naprázdno ( $G=0$ ), obr. 7.4b).



a) stav nakrátko

b) stav naprázdno

**Obr. 7.4** Extrémní případ zatížení generátoru.

Dosazením nulové hodnoty svorkového napětí ve stavu nakrátko do soustavy rovnic (x) obdržíme

$$I_i - G_i \cdot 0 = I_s$$

a dosazením nulové hodnoty svorkového proudu ve stavu naprázdno do soustavy rovnic (xx) získáme

$$U_i - R_i \cdot 0 = U_o.$$

Známostou hodnotou svorkového proudu nakrátko (short)  $I_s$  a svorkového napětí naprázdno (open)  $U_o$  jednoznačně stanovíme vnitřní (internal) parametry zdrojů  $I_i, U_i$  a jejich podílem hodnotu vodivosti respektive odporu rezistoru

$$G_i = R_i^{-1} = \frac{I_s}{U_o} = \frac{I_i}{U_i}$$

### □ Duální relace, princip ekvivalence

Modely generátoru jsou vždy duální a v mnoha případech i rovnocenné (ekvivalentní).

**Tab. 7.1** Duální relace.

|                 |                  |                   |                  |
|-----------------|------------------|-------------------|------------------|
| <b>Modely</b>   | <b>paralelní</b> | $\leftrightarrow$ | <b>sériový</b>   |
| <b>Stavy</b>    | <b>nakrátko</b>  | $\leftrightarrow$ | <b>naprázdno</b> |
| <b>Veličiny</b> | <b>proud</b>     | $\leftrightarrow$ | <b>napětí</b>    |
| <b>Imitance</b> | <b>vodivost</b>  | $\leftrightarrow$ | <b>odpor</b>     |

Paralelní a sériový model generátoru jsou ekvivalentní, vyhovují-li hodnoty jejich parametrů rovnici

$$G_i = R_i^{-1} = \frac{I_i}{U_i} .$$

### □ Příklad řešení soustavy rovnic Cramerovým pravidlem

Jako příklad uvedeme řešení soustavy rovnic (xx)

$$U_i - R_i I_1 = U_1 \quad (1)$$

$$U_i - R_i I_2 = U_2 \quad (2) ,$$

kterou zapíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & -I_1 \\ 1 & -I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_i \\ R_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} .$$

Vypočítáme hodnotu determinantu soustavy

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -I_1 \\ 1 & -I_2 \end{vmatrix} = -I_2 + I_1$$

a subdeterminantů

$$\Delta_U = \begin{vmatrix} U_1 & -I_1 \\ U_2 & -I_2 \end{vmatrix} = -U_1 I_2 + U_2 I_1 \quad \Delta_R = \begin{vmatrix} 1 & U_1 \\ 1 & U_2 \end{vmatrix} = U_2 - U_1 .$$

Parametry modelu generátoru stanovíme podílem příslušných subdeterminantů determinantem soustavy

$$R_i = \frac{\Delta_R}{\Delta} = \frac{U_2 - U_1}{-I_2 + I_1} = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} ,$$

$$U_i = \frac{\Delta_U}{\Delta} = \frac{-U_1 I_2 + U_2 I_1}{-I_2 + I_1} = \frac{U_1 I_2 - U_2 I_1}{I_2 - I_1} .$$

**Shrnutí pojmů 7.1.**

Stejnoseměrný generátor modelujeme paralelním zapojením zdroje proudu nebo sériovým zapojením zdroje a rezistoru. V lineárních obvodech parametry prvků modelů generátoru jednoznačně určíme ze dvou hodnot zatížení svorek generátoru. Extrémními případy zatížení je stav nakrátko a naprázdno.

**Otázky 7.1.**

1. Napište výraz pro vyjádření okamžitých hodnot periodické veličiny  $v$  algebraickým součtem okamžitých hodnot stejnosměrné složky  $V_{DC}$  a okamžitých hodnot střídavé složky  $v_{ac}$

2. Formulujte slovně matematický výraz

$$v = V_{DC} + v_{ac}.$$

3. Formulujte slovně matematický výraz pro výpočet stejnosměrné složky periodické veličiny

$$V_{DC} = \frac{1}{cT} \int_a^{a+cT} v \cdot 1 \cdot dt.$$

4. Napište matematický výraz pro výpočet okamžitých hodnot střídavé složky periodické veličiny.
5. Formulujte slovně matematický výraz pro výpočet okamžitých hodnot střídavé složky periodické veličiny.
6. Napište vztah mezi hodnotou periody a kmitočtu.

**Úlohy k řešení 7.1.**

1. Odečtete dobu periody a počet period zobrazené veličiny v obr. 1.
2. Odečtete minimální a maximální hodnotu veličiny v obr. 1.
3. Rozhodněte, zda amplituda, efektivní hodnota a okamžité hodnoty stejnosměrné složky např. v obr. 1 vykazují stejnou hodnotu.
4. Určete hodnotu amplitudy střídavé složky v obr. 1.

**KLÍČ K ŘEŠENÍ**

1. V obr. 1 jsou zobrazeny tři periody o  $T = 200$  ms.
2. Veličina v obr. 1 má minimální hodnotu 0 a maximální hodnotu 2.
3. Amplituda, efektivní hodnota a okamžité hodnoty stejnosměrné složky ve všech případech vykazují stejnou hodnotu, v obr. 1 je to 1.
4. Amplituda střídavé složky v obr. 1 má hodnotu 1.



## TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, článek 2.2.



## Studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 4.1.



## VIDEO

Doplňující videa:

7\_1\_Generator\_stridaveho\_napeti.wmv

7\_2\_Stejnosemny\_generator.wmv

7\_3\_Univerzalni\_generator.wmv

## 8. DĚLIČE



**Čas ke studiu:** 1 hodina



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- analyzovat dělič napětí
- analyzovat dělič proudu
- rozlišit dělič napětí a dělič proudu

### 8.1. Paralelní zapojení prvků



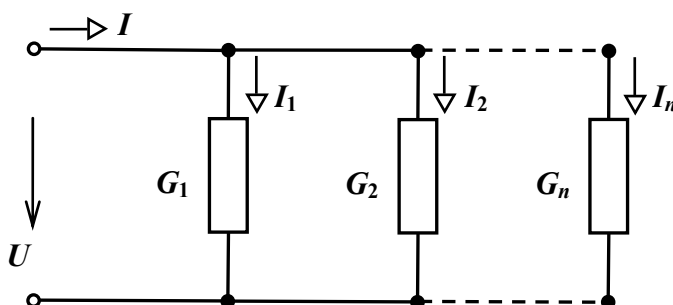
#### VÝKLAD

V paralelním zapojení prvků sečítáme okamžité hodnoty proudů podle 1. Kirchhoffova zákona

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = \sum_{k=1}^n i_k ,$$

přičemž napětí každého prvku je stejné. Ve stejnosměrných obvodech proud  $k$ -tého rezistoru (obr. 8.1) určíme Ohmovým zákonem- součinem napětí  $U$  a vodivosti rezistoru  $G_k$

$$i_k = I_k = U \cdot G_k .$$



**Obr. 8.1** Paralelní řazení rezistorů – dělič proudu.

Pro součet proudů paralelně řazených rezistorů pak platí rovnice

$$i = I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = U(G_1 + G_2 + \dots + G_n) = U \sum_{k=1}^n G_k .$$

Vyjádříme-li z této rovnice napětí

$$U = I \frac{1}{\sum_{k=1}^n G_k}$$

pak po jeho dosazení do rovnice pro proud k-tého rezistoru obdržíme mezi proudem  $I_k$ , proudem  $I$  a hodnotami vodivostí vztah

$$I_k = I \frac{G_k}{\sum_{k=1}^n G_k},$$

což vyjádříme slovy: proud  $I_k$  je přímo úměrný vodivosti k-tého rezistoru a nepřímo úměrný součtu vodivostí všech rezistorů paralelního zapojení. Paralelní zapojení pasivních prvků nazýváme dělič proudů.

#### □ Proudový přenos děliče proudů

Podělíme-li předchozí rovnici hodnotou proudu  $I$  obdržíme výraz

$$\frac{I_k}{I} = \frac{G_k}{\sum_{k=1}^n G_k} = F_{I_k},$$

který nazýváme proudový přenos k-tého rezistoru děliče proudů. Proudový přenos definuje, jaká část proudu z celkového proudu prochází příslušným prvkem děliče.

#### □ Dimenzování prvků děliče proudů

Pro realizaci děliče proudů nestačí pouze navrhnout hodnoty vodivostí rezistorů stejně významné je vypočítat pro každý rezistor ztrátový výkon

$$P_k = U^2 G_k = UI_k$$

a vybrat takové odporníky, které jsou na vypočtený ztrátový výkon dimenzovány.

Stejně tak je třeba i dimenzovat zdroj na výkon

$$P = UI = \frac{I^2}{\sum_{k=1}^n G_k} = U^2 \sum_{k=1}^n G_k.$$

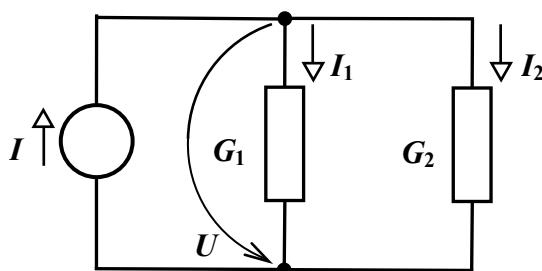
Vypočtené hodnoty ověříme Tellegenovou větou

$$-P + \sum_{k=1}^n P_k = 0.$$

zdroj energie.

#### ♦ Příklad 8.1

Odvoďte výrazy pro proudy děliče proudů v obr. 8.2 ze známých hodnot vodivostí rezistorů a proudu zdroje.



Obr. 8.2 Dělič proudů.

**Řešení:**

Nejdříve stanovíme hodnotu napětí zdroje proudu

$$U = \frac{I}{G_1 + G_2}$$

a pak už snadno zapíšeme výrazy pro proudy děliče proudu

$$I_1 = UG_1 = I \frac{G_1}{G_1 + G_2},$$

$$I_2 = UG_2 = I \frac{G_2}{G_1 + G_2}.$$

**Shrnutí pojmů 8.1.**

Paralelní zapojení pasivních prvků nazýváme dělič proudu. Charakterizujeme ho společným napětím a různými proudy. Při realizaci děliče je nezbytné respektovat nejen hodnoty vodivostí rezistorů, ale i výkony všech prvků včetně zdroje.

**Otázky 8.1.**

1. Uveďte veličinu, která je společná paralelnímu řazení prvků.
2. Napište výraz pro proud k-tého prvku děliče proudu.
3. Formulujte slovně předchozí matematický výraz.
4. Napište výraz pro přenos k-tého prvku děliče proudu.
5. Formulujte slovně význam předchozího matematického výrazu.
6. Vymezte, co je nezbytné respektovat při realizaci děliče.

**Úlohy k řešení 8.1.**

1. Nakreslete schéma zapojení tří rezistorů řazených paralelně a napájených zdrojem proudu.
2. Zakreslete do schématu počítací šipky všech obvodových veličin.
3. Zvolte si hodnoty parametrů zdroje a vodivostí rezistorů.
4. Vypočítejte hodnoty proudů a napětí pro zvolené hodnoty obvodových parametrů.
5. Ověřte (verifikujte) vypočtené hodnoty Tellegenovou větou.

**KLÍČ K ŘEŠENÍ**

Klíč k řešení naleznete v této kapitole.

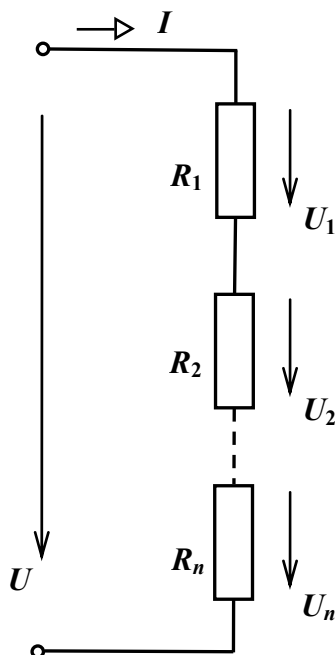
## 8.2. Sériové zapojení prvků

V sériovém zapojení prvků sečítáme okamžité hodnoty napětí podle 2. Kirchhoffova zákona

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k ,$$

přičemž proud každého prvku je stejný. Ve stejnosměrných obvodech napětí  $k$ -tého rezistoru (viz obr. 8.3) určíme ohmovým zákonem-součinem proud  $I$  a odporu rezistoru  $R_k$

$$u_k = U_k = I \cdot R_k .$$



**Obr. 8.3** Sériové zapojení rezistorů – dělič napětí.

Pro součet napětí rezistorů pak platí rovnice

$$u = U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = I \sum_{k=1}^n R_k .$$

Vyjádříme-li z této rovnice proud

$$I = U \frac{1}{\sum_{k=1}^n R_k} ,$$

pak po jeho dosazení pro napětí  $k$ -tého rezistoru obdržíme mezi napětím  $U_k$ , napětím  $U$  a hodnotami odporů rezistorů vztah

$$U_k = U \frac{R_k}{\sum_{k=1}^n R_k} ,$$

což vyjádříme slovy: napětí  $U_k$  je přímo úměrné odporu  $k$ -tého rezistoru a nepřímo úměrné součtu odporů všech rezistorů sériového zapojení. Sériové zapojení pasivních prvků nazýváme dělič napětí.

### □ Napěťový přenos děliče napětí

Podělíme-li předchozí rovnici hodnotou napětí  $U$  obdržíme výraz

$$\frac{U_k}{U} = \frac{R_k}{\sum_{k=1}^n R_k} = F_{U_k},$$

který nazýváme napěťový přenos  $k$ -tého rezistoru děliče napětí. Napěťový přenos definuje, jaká část napětí z celkového napětí působí na příslušném prvku děliče.

### □ Dimenzování prvků děliče napětí

Pro realizaci děliče napětí nestačí pouze navrhnout hodnoty odporů rezistorů, stejně významné je vypočítat pro každý rezistor ztrátový výkon

$$P_k = I^2 G_k = IU_k$$

a vybrat takové odporníky, které jsou na vypočtený ztrátový výkon dimenzovány.

Stejně tak je třeba i dimenzovat zdroj na výkon

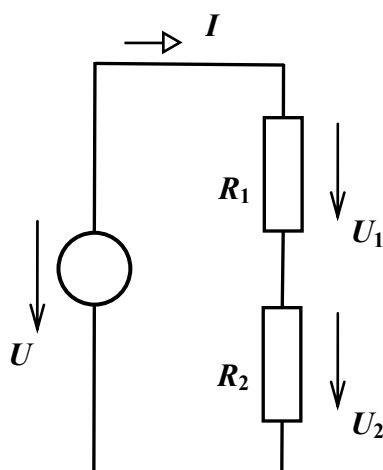
$$P = IU = \frac{U^2}{\sum_{k=1}^n R_k} = I^2 \sum_{k=1}^n R_k.$$

Vypočtené hodnoty ověříme Tellegenovou větou

$$-P + \sum_{k=1}^n P_k = 0.$$

### Příklad 8.2

*Odvoďte výrazy pro napětí děliče napětí v obr. 8.4 ze známých hodnot odporů rezistorů a napětí zdroje.*



**Obr. 8.4** Dělič napětí.

**Řešení:**

Nejdříve stanovíme hodnotu proudu zdroje napětí

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

a pak už snadno zapíšeme výrazy pro napětí děliče napětí

$$U_1 = IR_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

$$U_2 = IR_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

**Shrnutí pojmů 8.2.**

Sériové zapojení pasivních prvků nazýváme dělič napětí. Charakterizujeme ho společným proudem a různým napětím. Při realizaci děliče je nezbytné respektovat nejen hodnoty odporů rezistorů, ale i výkony všech prvků včetně zdroje.

**Úlohy k řešení 8.2.**

1. Uveďte veličinu, která je společná sériovému zapojení obvodových prvků.
2. Napište výraz pro napětí k-tého prvku děliče napětí.
3. Formulujte slovně předchozí matematický výraz.
4. Napište výraz pro přenos k-tého prvku děliče napětí.
5. Formulujte slovně význam předchozího matematického výrazu.
6. Vymezte, co je nezbytné respektovat při realizaci děliče.
7. Nakreslete schéma zapojení tří rezistorů řazených sériově a napájených zdrojem napětí.
8. Zakreslete do schématu počítací šipky všech obvodových veličin.
9. Zvolte si hodnoty parametrů zdroje a odporů rezistorů.
10. Vypočítejte hodnoty napětí a proudů pro zvolené hodnoty obvodových parametrů.
11. Ověřte (verifikujte) vypočtené hodnoty Tellegenovou větou.

**Klíč k řešení**

Klíč k řešení naleznete v této kapitole.

**TEXT K PROSTUDOVÁNÍ**

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, článek 4.3 a 7.4.

**Studijní texty**

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 4.1.

**Zadání samostatné práce:**

Navrhněte z reálných prvků nejjednodušší dělič proudu nebo napětí.

## 9. ELEMENTÁRNÍ METODY



**Čas ke studiu:** 1 hodina



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- Řešit elementární metody
- rozlišit elementární metody
- rozhodnout, kterou metodu použít

### 9.1. Metoda postupného zjednodušování

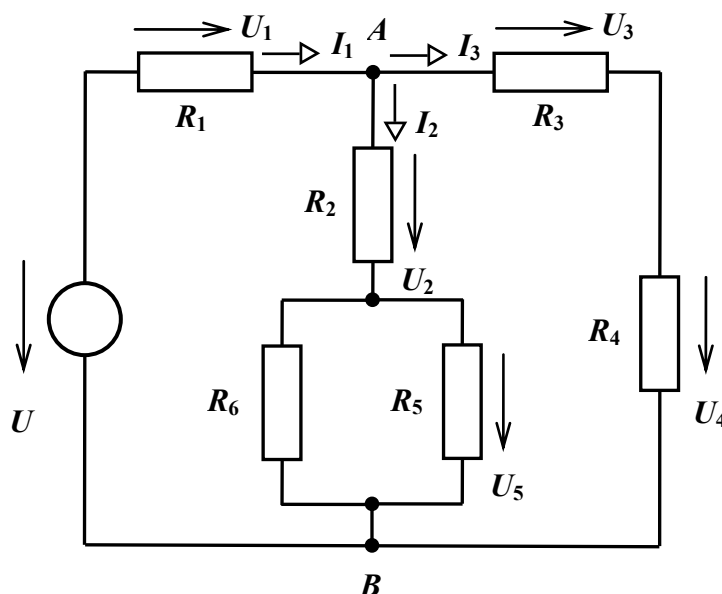


#### VÝKLAD

Metodu postupného zjednodušování používáme v analýze obvodů napájených jedním zdrojem, když ostatní prvky obvodu jsou řazeny paralelně nebo sériově. Obvod řešíme tak, že postupně nahrazujeme paralelní nebo sériové zapojení imitancí jedním rovnocenným (ekvivalentním) prvkem tak dlouho, až celkové zapojení imitancí vyjádříme hodnotou ekvivalentní imitance.; Pro stanovení veličin v každé části řešeného obvodu pak zpětně rozvíjíme náhradní schéma příslušné proudy a napětí obvykle určujeme podle vztahů pro děliče.

#### Příklad 9.1.

Určete hodnotu ztrátového výkonu  $P_3$  rezistoru  $R_3$  v obvodu na obr. 1, je-li  $U = 100 \text{ V}$ ,  $R_1 = 50 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 40 \Omega$ ,  $R_4 = 60 \Omega$ , a  $R_5 = R_6 = 160 \Omega$ .



Obr. 1 Schéma zapojení k příkladu 9.1

**Řešení:**

Nejdříve postupně nahradíme paralelní či sériové zapojení rezistorů jejich ekvivalentní hodnotou:

$$R_I = R_3 + R_4 = 40 + 60 = 100 \, \Omega ,$$

$$R_{II} = R_5 \parallel R_6 = 160 \parallel 160 = 80 \, \Omega ,$$

$$R_{III} = R_2 + R_{II} = 20 + 80 = 100 \, \Omega ,$$

$$R_{IV} = R_I \parallel R_{III} = 100 \parallel 100 = 50 \, \Omega ,$$

$$R_V = R_1 + R_{IV} = 50 + 50 = 100 \, \Omega .$$

Nyní stanovíme hodnotu proudu  $I_1$  dodávaného zdrojem napětí obvodu

$$I_1 = \frac{U}{R_V} = \frac{100}{100} = 1 \, \text{A} ,$$

proud  $I_3$  rezistoru  $R_3$  určíme ze vztahu pro dělič proudu tvořený rezistory  $R_I$  a  $R_{III}$

$$I_3 = I_1 \frac{R_{III}}{R_I + R_{III}} = 1 \frac{100}{100 + 100} = 0,5 \, \text{A}$$

a poté vypočítáme hodnotu ztrátového výkonu  $P_3$  rezistoru  $R_3$

$$P_3 = R_3 I_3^2 = 30 \cdot 0,5^2 = 7,5 \, \text{W} .$$

**Shrnutí pojmů 9.1.**

Metodu postupného zjednodušování můžeme uplatnit pouze v lineárních obvodech, jejichž prvky jsou řazeny pouze paralelně nebo sériově, a to jak se stejnosměrnými, tak i harmonickými zdroji. Zdatní studenti ji mohou použít i v obvodech s více než jedním zdrojem aplikací vět o náhradních zdrojích.

**Otázky 9.1.**

1. Rozhodněte, které hodnoty sečítáme v paralelním zapojení rezistorů: vodivosti nebo odpory?
2. Napište výraz pro ekvivalentní hodnotu paralelního řazení rezistorů algebraickým součtem jejich parametrů.
3. Rozhodněte, které hodnoty sečítáme v sériovém zapojení rezistorů: vodivosti nebo odpory?

4. Napište výraz pro ekvivalentní hodnotu sériového řazení rezistorů algebraickým součtem jejich parametrů.
5. Nakreslete schéma zapojení děliče proudu tvořeného dvěma a třemi rezistory.
6. Napište výraz pro proud děliče proudu tvořeného dvěma a třemi rezistory.
7. Nakreslete schéma zapojení děliče napětí tvořeného dvěma a třemi rezistory.
8. Napište výraz pro napětí děliče napětí tvořeného dvěma a třemi rezistory.



### Úlohy k řešení 9.1.

1. Stanovte hodnotu ztrátového výkonu  $P_1$  rezistoru  $R_1$  v obvodu na obr. 9.1.
2. Stanovte hodnotu výkonu  $P$  zdroje napětí v obvodu na obr. 9.1.
3. Vypočítejte hodnoty proudů a napětí v obvodu na obr. 9.1, když ke svorkám AB nejsou připojeny rezistory  $R_3$ ,  $R_4$  a hodnota napětí zdroje je  $U = 150 \text{ V}$ .
4. Výpočty v bodě 3 ověřte (verifikujte) Tellegenovou větou.



### Klíč k řešení

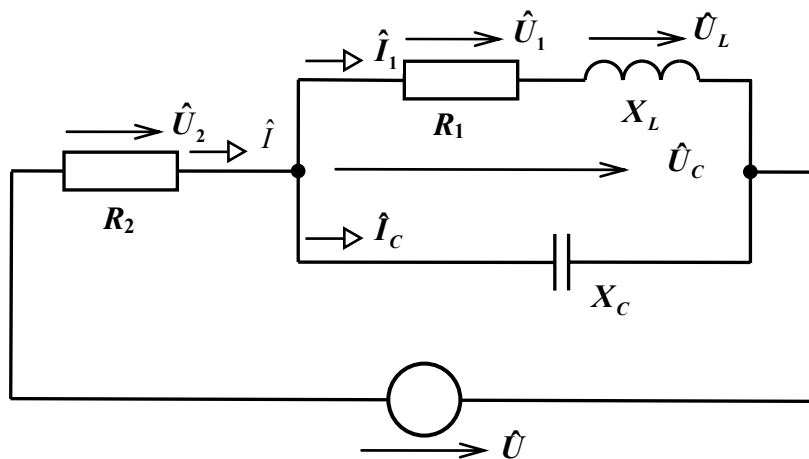
1.  $P_1 = 50 \text{ W}$ .
2. Hodnota výkonu zdroje napětí je záporná, protože proud a napětí vykazují opačný směr  $P = -100 \text{ W}$ .
3.  $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$ , atd.
4.  $P_1 = 50 \text{ W}$ ,  $P_2 = 20 \text{ W}$ ,  $P_5 = P_6 = 40 \text{ W}$ ,  $P = -150 \text{ W}$ .

## 9.2. Metoda přímo úměrných veličin

Její postup spočívá v tom, že pro známé schéma zapojení, jehož prvky jsou řazeny paralelně či sériově si zvolíme hodnotu příslušné obvodové veličiny ve vhodné části obvodu a pro ni pak určíme ostatní hodnoty obvodových veličin včetně parametru zdroje. Skutečné hodnoty proudů a napětí v obvodu pak obdržíme vynásobením vypočítaných hodnot konstantou, kterou určíme podílem zadaného a vypočítaného parametru zdroje. Metodu lze použít pouze při napájení z jediného zdroje.

**Příklad 9.2**

Určete metodou přímo úměrných veličin hodnoty všech obvodových veličin a komplexní hodnotu výkonu obvodu i zdroje harmonického průběhu napětí v obvodu na obr. 9.2, je-li  $U' = 100 \text{ V}$ ,  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $X_L = 4 \Omega$ ,  $X_C = 5 \Omega$ .



Obr. 9.2 Schéma zapojení k příkladu 9.2.

**Řešení:**

Nejdříve si zvolíme ve vhodné části obvodu vhodnou veličinu vhodné hodnoty (výběr je obvykle závislý na zkušenosti řešitele), např. hodnotu proudu  $\hat{I}_1 = 1 \text{ A}$ .

Následně vypočítáme hodnotu napětí

$$\hat{U}_1 = (R_1 + jX_L) \hat{I}_1 = (3 + j4) \cdot 1 = (3 + j4) = 5 \cdot e^{j53,13^\circ} \text{ V},$$

poté hodnotu proudu kapacitoru

$$\hat{I}_C = j\omega C \hat{U}_1 = j0,2(3 + j4) = (-0,8 + j0,6) \text{ A} = 1 \cdot e^{j143,13^\circ} \text{ A}$$

a z 1. Kirchhoffova zákona hodnotu celkového proudu

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_C = 1 - 0,8 + j0,6 = (0,2 + j0,6) \text{ A} = 0,632 \cdot e^{j71,56^\circ} \text{ A}.$$

Potom hodnotu napětí rezistoru  $R_2$

$$\hat{U}_2 = R_2 \hat{I} = 10(0,2 + j0,6) = (2 + j6) \text{ V} = 6,32 \cdot e^{j71,56^\circ} \text{ V}$$

a z 2. Kirchhoffova zákona hodnotu celkového napětí

$$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 = (2 + j6) + (3 + j4) = (5 + j10) \text{ V} = 11,18 \cdot e^{j63,43^\circ} \text{ V}.$$

Nakonec podílem zadané hodnoty napětí  $U'$  a vypočítané hodnoty napětí  $\hat{U}$  stanovíme hodnotu konstanty přímé úměrnosti

$$\hat{K} = \frac{\hat{U}'}{\hat{U}} = \frac{100}{11,18 \cdot e^{j63,43^\circ}} = 8,945 \cdot e^{-j63,43^\circ} \quad (-)$$

Skutečné hodnoty proudů a napětí získáme vynásobením vypočtených hodnot hodnotou konstanty přímé úměrnosti.

### □ Imitance

Celkovou hodnotu imitance (admittance či impedance) můžeme obdržet výpočtem ze zadaných hodnot imitací nebo méně pracněji podílem komplexní hodnoty celkového proudu a napětí podle Ohmova zákona. V daném případě obdržíme hodnotu

$$\hat{Y} = \hat{Z}^{-1} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} = \frac{0,632 \cdot e^{j71,56^\circ}}{11,18 \cdot e^{j63,48^\circ}} \doteq 56,5 \cdot e^{j8,08^\circ} \text{ mS} = (55,9 + j7,94) \text{ mS}.$$

Admitanci modelujeme paralelním a impedanci sériovým zapojením dvou prvků, v daném případě rezistoru a kapacitoru.

Hodnota imitance nikdy nezávisí na hodnotě konstanty přímé úměrnosti.

### □ Výkon

Komplexní hodnotu zdánlivého výkonu určíme z vypočítané hodnoty proudu a napětí, v paralelním modelu z výrazu

$$\hat{S}_Y = \hat{U} \hat{I}^* = \hat{Y}^* U^2 = 0,0565 \cdot e^{-j8,08^\circ} \cdot 11,18^2 = 7,06 \cdot e^{-j8,08^\circ} \doteq (7 - j1) \text{ VA}$$

a v sériovém modelu z výrazu

$$\hat{S}_Z = \hat{U} \hat{I}^* = \hat{Z} I^2 = 17,7 \cdot e^{-j8,08^\circ} \cdot 0,632^2 = 7,06 \cdot e^{-j8,08^\circ} \doteq (7 - j1) \text{ VA}.$$

Skutečné hodnoty komplexních výkonů získáme vynásobením vypočtených hodnot zdánlivých výkonů druhou mocninou absolutní hodnoty konstanty přímé úměrnosti.

Doposud byly diskutovány komplexní hodnoty zdánlivých výkonů obvodu ve složkovém tvaru. Zdůrazňujeme, že komplexní hodnota zdánlivého výkonu zdroje má opačná znaménka vůči komplexní hodnotě zdánlivého výkonu obvodu, což je v souladu s Tellegenovou větou.

### □ Měření frekvenčních charakteristik

Metodu přímo úměrných veličin můžeme velmi účinně využít při měření proudu a napětí generátoru při měření frekvenčních charakteristik obvodu. Vnitřní impedance generátoru a impedance obvodu vytváří frekvenčně závislý dělič napětí, a proto při změnách frekvence dochází ke kolísání napětí i proudu zátěže. Při měření není třeba udržovat konstantní proud nebo napětí zátěže, stačí pro každou hodnotu frekvence stanovit konstantu přímé úměrnosti proudu respektive napětí, poté vynásobit příslušné hodnoty konstantami a tak úspěšně simulovat napájení obvodu ze zdroje proudu respektive napětí.



### Shrnutí pojmů 9.2.

Metodu přímo úměrných veličin můžeme uplatnit pouze v lineárních obvodech, jejichž prvky jsou řazeny pouze paralelně nebo sériově při napájení z jednoho zdroje, a to jak stejnosměrného, tak i harmonického.



### Otázky 9.2.

1. Vysvětlete postup určení konstanty přímé úměrnosti.

2. Odůvodněte, proč hodnota imitance obvodu nezávisí na hodnotě konstanty přímé úměrnosti.
3. Formulujte slovně způsob výpočtu hodnoty komplexního zdánlivého výkonu paralelního modelu obvodu.
4. Formulujte slovně způsob výpočtu hodnoty komplexního zdánlivého výkonu sériového modelu obvodu.
5. Uveďte, jakou hodnotu konstanty přímé úměrnosti používáme při výpočtu hodnot skutečných výkonů.



### Úlohy k řešení 9.2.

1. Stanovte skutečnou hodnotu proudu kapacitoru na obr. 9.2.
2. Stanovte hodnotu ztrátového výkonu  $P_1$  rezistoru  $R_1$  v obvodu na obr. 9.2.
3. Stanovte skutečnou komplexní hodnotu zdánlivého výkonu  $\hat{S}_z$  zdroje napětí v obvodu na obr. 9.2.
4. Řešte obvod na obr. 2 tak, že si zvolíte vhodnou hodnotu napětí  $\hat{U}_C$ .



### KLÍČ K ŘEŠENÍ

1. Vypočítanou hodnotu proudu vynásobíme konstantou přímé úměrnosti a obdržíme hodnotu  $8,945 \cdot e^{j79,70^\circ} \text{ A}$ .
2.  $P_1 = R_1 I_1^2 K^2 = 10 \cdot 1,8,945^2 \doteq 800 \text{ W}$ .
3. U vypočítané hodnoty  $\hat{S}_z$  v kap. 9. 2 změníme znaménka složek a následně vynásobíme druhou mocninou absolutní hodnoty konstanty přímé úměrnosti.
4. Použijeme podobný postup jako v příkladu 9.2 a skutečné napětí zdroje porovnáme s hodnotou v příkladu 9.2.



### TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

- [1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, článek 2.2.
- [2] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů II. Skriptum ČVUT Praha 2004, článek 6. 1., 6. 2.



### Studijní texty

- [2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 4.1.

**Zadání samostatné práce:**

Obvod zadaný v kapitole Metoda postupného zjednodušování řešte metodou přímo úměrných veličin.

**VIRTUÁLNÍ LABORATOŘE**

Doplňující virtuální laboratoře:

9\_1\_Transfigurace.xls

9\_2\_Stridavy\_obvod\_reseny\_priklad.xls

## 10. OBECNÁ METODA



**Čas ke studiu:** 30 minut



**Cíl** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- analyzovat nelineární obvody
- řešit nelineární obvody

### 10.1. Analýza nelineárního obvodu



#### VÝKLAD

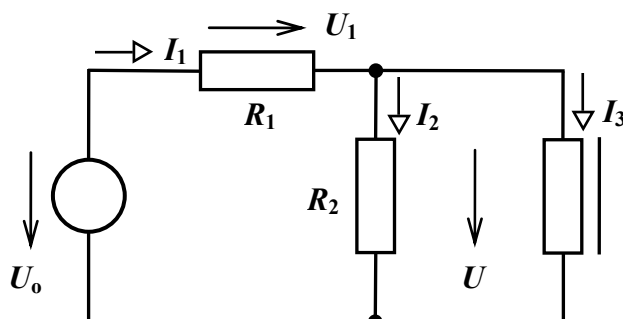
Každý obvod, který obsahuje alespoň jeden nelineární prvek, hodnotíme jako nelineární a nelze pro jeho řešení použít univerzálních metod analýzy lineárních obvodů, to je těch založených na principu superpozice, jako je metoda řezových napětí a smyčkových proudů.

Nelineární obvody lze řešit pouze obecnou metodou v krocích:

1. *krok*: vymezíme rovnice popisující charakteristiky prvků,
2. *krok*: sestavíme rovnice podle Kirchhoffových zákonů popisující zapojení prvků,
3. *krok*: vhodnou metodou řešíme soustavu rovnic,
4. *krok*: verifikujeme výsledky řešení soustavy rovnic aplikací Kirchhoffových zákonů,
5. *krok*: verifikujeme výsledky řešení podle Tellegenovy věty a diskutujeme získané poznatky.

#### Příklad 10.1.

Určete napětí  $U$  rezistoru s nelineární charakteristikou popsanou funkcí  $I = 2 + 1,5U + 0,5U^2$  v obvodě na obr. 10. 1, kde  $U_0 = 10\text{ V}$ ,  $R_1 = 1\ \Omega$ ,  $R_2 = 2\ \Omega$ .



**Obr. 10.1** Schéma zapojení s nelineárním rezistorem.

**Řešení:**

1. *krok*: vymezíme rovnice popisující charakteristiky rezistorů:

$$U_1 = R_1 I_1, \quad U = R_2 I_2, \quad I = 2 + 1,5U + 0,5U^2,$$

2. *krok*: sestavíme rovnice popisující zapojení prvků:

1. Kirchhoffův zákon -  $I_1 = I_2 + I$ ,

2. Kirchhoffův zákon -  $U_o = U_1 + U$ ,

3. *krok*: vhodnou metodou řešíme soustavu rovnic. V daném případě proud  $I_1$  vyjádříme podle napětí  $U$  rovnicí

$$I_1 = I_2 + I = \frac{U}{R_2} + I$$

a dosadíme do rovnice sestavené podle 2. K. z.

$$U_o = U_1 + U = R_1 I_1 + U.$$

Po úpravě a následném vyčíslení obdržíme kvadratickou rovnici

$$0,5U^2 + 3U - 8 = 0,$$

jejichž kořeny jsou  $U', U'' = -3 \pm \sqrt{9 + 16} = 2, -8 \text{ V}$ .

4. *krok*: ověříme (verifikujeme) výsledky řešení soustavy rovnic:

a) hodnotu  $U' = 2 \text{ V}$

nejdříve dosadíme do charakteristiky nelineárního prvku

$$I' = 2 + 1,5U'^2 + 0,5U' = 2 + 3 + 2 = 7 \text{ A}$$

a do charakteristiky rezistoru  $R_2$

$$I'_2 = \frac{U'}{R_2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ A},$$

vypočtené hodnoty proudů do rov. 1. K. z.

$$I'_1 = I'_2 + I' = 1 + 7 = 8 \text{ A}$$

hodnotu proudu  $I'_1$  do charakteristiky rezistoru  $R_1$

$$U'_1 = R_1 I'_1 = 1,8 \cdot 8 = 8 \text{ V}$$

a vypočtenou hodnotu napětí do rov. 2. K.z.

$$U'_o = U'_1 + U' = 8 + 2 = 10 \text{ V} = U_o$$

Závěr: Kořen  $U' = 2 \text{ V}$  vyhovuje Kirchhoffovým zákonům.

a) hodnotu  $U'' = -8 \text{ V}$

nejdříve dosadíme do charakteristiky nelineárního prvku

$$I'' = 2 + 1,5U''^2 + 0,5U'' = 2 - 12 + 32 = 22 \text{ A}$$

a do charakteristiky rezistoru  $R_2$

$$I_2'' = \frac{U''}{R_2} = \frac{-8}{2} = -4 \text{ A} ,$$

vypočtené hodnoty proudů do rov. 1. K. z.

$$I_1'' = I_2'' + I'' = -4 + 22 = 18 \text{ A}$$

hodnotu proudu  $I_1''$  do charakteristiky rezistoru  $R_1$

$$U_1'' = R_1 I_1'' = 1,18 = 18 \text{ V}$$

a vypočtenou hodnotu napětí do rov. 2. K. z.

$$U_0'' = U_1'' + U'' = 18 - 8 = 10 \text{ V} = U_0$$

**Závěr:** Kořen  $U'' = -8 \text{ V}$  vyhovuje Kirchhoffovým zákonům.

**5. krok:** verifikujeme výsledky řešení podle Tellegenovy věty a diskutujeme získané poznatky:

V tomto kroku se zaměříme pouze na diskuzi výkonu nelineárního rezistoru. Pro kořen  $U' = 2 \text{ V}$  prochází nelineárním rezistorem proud  $I' = 7 \text{ A}$  a jeho ztrátový výkon má kladnou hodnotu  $P' = U' \cdot I' = 2 \cdot 7 = 14 \text{ W}$ . Pro kořen  $U'' = -8 \text{ V}$  prochází nelineárním rezistorem proud  $I'' = 22 \text{ A}$  a jeho ztrátový výkon má zápornou hodnotu  $P'' = U'' \cdot I'' = -8 \cdot 22 = -176 \text{ W}$ .

**Poznání:** I když napětí  $U'' = -8 \text{ V}$  vyhovuje Kirchhoffovým zákonům, v tomto případě se nelineární rezistor chová jako zdroj, což je fyzikálně neodůvodnitelné.



### Shrnutí pojmů 10.1.

Obecnou metodu řešení elektrických obvodů lze aplikovat jak pro analýzu lineárních tak i nelineárních obvodů. Při analýze postupujeme podle kroků:

1. *krok:* vymezíme rovnice popisující charakteristiky prvků,
2. *krok:* sestavíme rovnice podle Kirchhoffových zákonů popisující zapojení prvků,
3. *krok:* vhodnou metodou řešíme soustavu rovnic,
4. *krok:* verifikujeme výsledky řešení soustavy rovnic aplikací Kirchhoffových zákonů,
5. *krok:* verifikujeme výsledky řešení podle Tellegenovy věty a diskutujeme získané poznatky.



### Otázky 10.1.

1. Uveďte postup při řešení obvodů obecnou metodou.
2. Posuďte, zda obecnou metodou můžeme analyzovat lineární nebo i nelineární obvody.

3. Rozhodněte, které kritérium rozhoduje o správnosti (korektnosti) řešení elektrického obvodu.



### Úlohy k řešení 10.1.

1. Sestavte rovnice pro Tellegenovu větu obvodu na obr. 10.1.
2. Zaměňte v zapojení na obr. 1 nelineární rezistor s rezistorem  $R_1$ .
3. Vyřešte obvod se záměnou rezistorů.



### KLÍČ K ŘEŠENÍ

V bodě 1. a 3. Kritérium správnosti řešení: součet výkonů se musí rovnat nule.



### TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, článek 4. 2. až 4. 6.



### Studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 4.1.



### Zadání samostatné práce:

Vyřešte obvod řešený v této kapitole s tím, že před řešením zaměníte  $I$  a  $U$  v charakteristice nelineárního prvku.



### VIRTUÁLNÍ LABORATOŘ

Doplňující virtuální laboratoř:  
10\_1\_Linearizace\_zarovky.xls

## 11. PRINCIPY



**Čas ke studiu:** 2 hodiny



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- kategorizovat principy v Teorii obvodů
- analyzovat princip superpozice
- analyzovat princip vzájemnosti
- analyzovat princip kompenzace

### 11.1. Princip superpozice



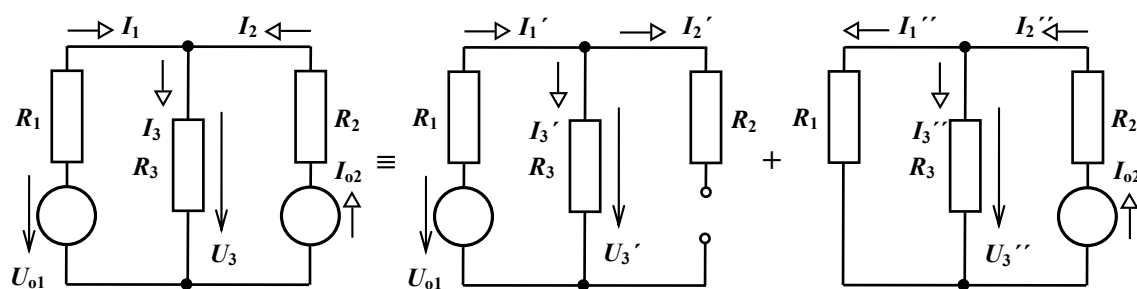
#### VÝKLAD

Princip superpozice (nezávislého působení jednotlivých zdrojů) je významnou metodou analýzy lineárních obvodů, často usnadňuje analýzu jednoduchých obvodů napájených z více zdrojů. Umožňuje určit proudové a napěťové odezvy v lineárním obvodu při současném působení více nezávislých zdrojů jako součet odezev na působení každého zdroje při vyjmutí ostatních zdrojů.

Princip superpozice nelze aplikovat pro výkony, čili pro Tellegenovu větu.

#### Příklad 11.1.

Analýzujte principem superpozice obvod na obr. 11.1, je-li zadáno  $U_{o1} = 5 \text{ V}$ ,  $I_{o2} = 3 \text{ A}$ ,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 3 \Omega$ . Výsledky verifikujte Tellegenovou větou.



**Obr. 11.1** Schéma zapojení k analýze obvodu principem superpozice



#### Řešení:

Zadaný obvod obsahuje dva zdroje, proto ho vyjádříme superpozicí dvou dílčích obvodů, přičemž vždy ponecháme jen jeden zdroj a druhý vyjmemme.

Počítací šipky v zadaném obvodu zvolíme libovolných směrů, kdežto počítací šipky v dílčích obvodech je vhodné stanovit v souladu s polaritou příslušného zdroje a rozlišit jejich označení jednou a dvěma čárkami.

Řešení dílčího obvodu napájeného zdrojem napětí:

Po vyjmutí zdroje proudu je evidentní, že hodnota proudu

$$I'_2 = 0 \text{ A} ,$$

potom

$$I'_1 = I'_3 = \frac{U_{o1}}{R_1 + R_3} = \frac{5}{4} \text{ A} .$$

Rezistory  $R_1$  a  $R_3$  tvoří dělič napětí, proto napětí

$$U'_3 = U_{o1} \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 5 \frac{3}{4} = \frac{15}{4} \text{ V} .$$

Řešení dílčího obvodu napájeného zdrojem proudu:

Je evidentní, že hodnota proudu

$$I''_2 = I_{o2} = 3 \text{ A} .$$

Rezistory  $R_1$  a  $R_3$  tvoří dělič proudu, proto proud

$$I''_1 = I_{o2} \frac{G_1}{G_1 + G_3} = 3 \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{9}{4} \text{ A}$$

a proud

$$I''_3 = I_{o2} \frac{G_3}{G_1 + G_3} = 3 \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \text{ A} .$$

Z Ohmova zákona pak určíme napětí

$$U''_3 = R_3 I''_3 = 3 \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \text{ V} .$$

Při sestavování rovnic pro celkové hodnoty veličin je nezbytné respektovat počítací šipky v příslušných obvodech, proto

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = \frac{5}{4} - \frac{9}{4} = -1 \text{ A} ,$$

$$I_2 = I''_2 = 3 \text{ A} ,$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2 \text{ A} ,$$

$$U_3 = U'_3 + U''_3 = \frac{15}{4} + \frac{9}{4} = 6 \text{ V} .$$

Je vhodné ještě určit z 2. Kirchhoffova zákona napětí zdroje proudu, při sestavování rovnice uvažujeme jeho počítací šipku směřující dolů

$$U_{o2} = R_2 I_2 + U_3 = 2.3 + 6 = 12 \text{ V}.$$

Kontrola řešení Tellegenovou větou:

$$P_{o1} = -U_{o1} I_1 = -5 \cdot (-1) = 5 \text{ W}$$

$$P_{o2} = -U_{o2} I_{o2} = -12.3 = -36 \text{ W}$$

$$P_1 = R_1 I_1^2 = 1 \cdot 1^2 = 1 \text{ W}$$

$$P_2 = R_2 I_2^2 = 2.3^2 = 18 \text{ W}$$

$$P_3 = R_3 I_3^2 = 3.2^2 = 12 \text{ W}$$

$$\sum_k P_k = 0 \text{ W}$$

Hodnoty výkonů vyhovují Tellegenově větě, přičemž zdroj napětí se v daném případě chová jako rezistor, protože odebírá energii.



### Shrnutí pojmů 11.1.

Princip superpozice umožňuje určit proudové a napěťové odezvy v lineárním obvodu při současném působení více nezávislých zdrojů jako součet odezev na působení každého zdroje při vyjmutí ostatních zdrojů.

Princip superpozice nelze aplikovat pro výkony, čili pro Tellegenovu větu.



### Otázky 11.1.

4. Definujte charakteristiky prvků obvodů, které lze řešit principem superpozice.
5. Vymezte vyjmutí zdrojů proudu z obvodu.
6. Vymezte vyjmutí zdrojů napětí z obvodu.
7. Posuďte, zda lze princip superpozice aplikovat pro výkony.
8. Stanovte způsob kontroly správnosti analýzy obvodů.



### Úlohy k řešení 11.1.

1. Nakreslete schéma zapojení podle obr. 11.1 k ověření principu superpozice, v němž zaměníte zdroj proudu a zdroj napětí.
2. Zakreslete do schématu počítací šipky proudů a napětí.
3. Vypočítejte proudy a napětí v dílčích obvodech.
4. Vypočítejte celkové proudy a napětí.
5. Ověřte správnost řešení obvodu.



## KLÍČ K ŘEŠENÍ

Postupujte podle řešeného příkladu.



## TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, článek 4.3.



## Studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 4.1.

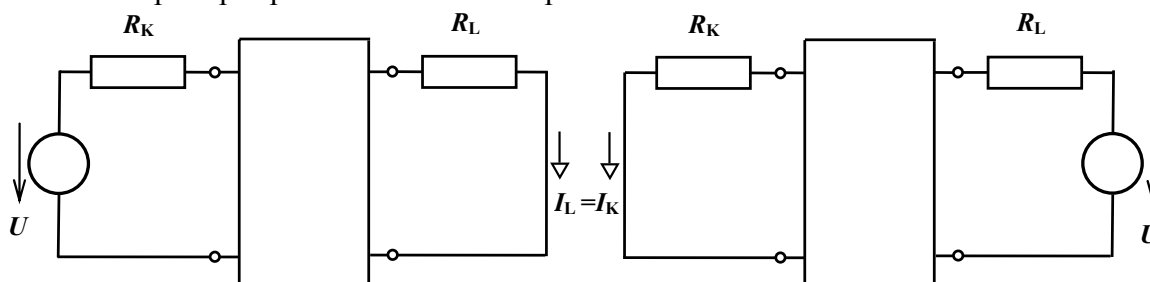
## 11.2. Princip vzájemnosti



### VÝKLAD

Každý lineární obvod je reciprocitní-přenáší energii oběma směry stejně. Konkrétně: vyvolá-li zdroj o napětí  $U$  zapojený v K-té větvi obvodu v L-té větvi proudovou odezvu  $I_L$ , pak po přemístění zdroje do L-té větve vyvolá v K-té větvi proudovou odezvu  $I_K$ , která má stejnou hodnotu jako proud  $I_L$ .

Duálně to platí pro proudové buzení a napětěvou odezvu.

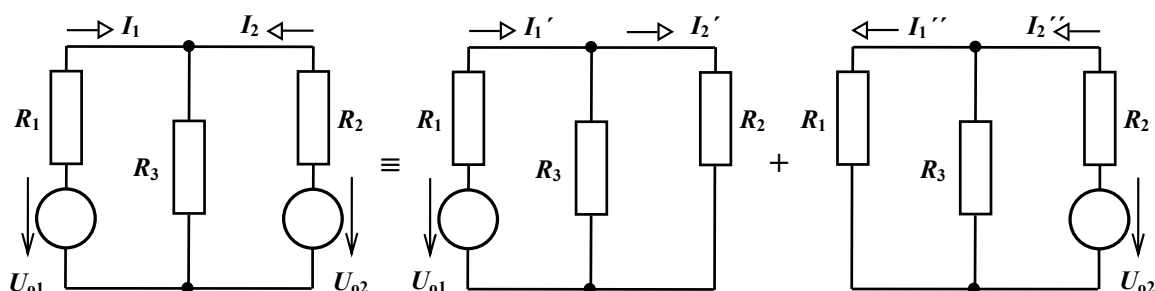


**Obr. 11.2** Grafické zobrazení principu reciprocity

Reciprocita je charakterizována souměrností matic soustavy podle hlavní diagonály např. u metody řezových napětí a smyčkových proudů.

**Příklad 11.2.**

Ověřte princip reciprocity pro obvod zadaný na obr. 11.3.



**Obr. 11.3** Schéma zapojení k ověření principu reciprocity pro zdroje napětí.

**Řešení:**

V daném případě k analýze s výhodou použijeme princip superpozice.

K analýze dílčích obvodů použijeme metody postupného zjednodušování. Hodnoty celkových odporů určíme podle výrazů

$$R' = R_1 + R_2 \parallel R_3 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$R'' = R_2 + R_1 \parallel R_3 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_3}$$

a pro hodnoty proudů snadno odvodíme, že

$$I_1' = \frac{U_{01}}{R'}, \quad I_2'' = \frac{U_{02}}{R''}$$

$$I_2' = I_1' \frac{R_3}{R_2 + R_3} = U_{01} \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = U_{01} \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_1'' = I_2'' \frac{R_3}{R_1 + R_3} = U_{02} \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = U_{02} \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Odvozené vzorce se liší pouze hodnotou napětí zdroje. Pro  $U_{01} = U_{02}$  je i  $I_2' = I_1''$  ( $I_K = I_L$ ), čímž byla prokázána platnost principu reciprocity.

**Shrnutí pojmů 11.2.**

Každý obvod, který je tvořen pouze prvky s lineárními charakteristikami a přenáší energii oběma směry stejně, nazýváme recipročním.

**Otázky 11.2.**

1. . Definiujte charakteristiky prvků recipročního obvodu.

2. . Fyzikálně odůvodněte princip reciprocity.
3. . Vymezte princip reciprocity pro zdroje proudu.
4. . Vymezte princip reciprocity pro zdroje napětí.



### Úlohy k řešení 11.2.

1. Nakreslete schéma zapojení podle obr. 11.3 k ověření principu reciprocity pro zdroje proudu.
2. Vymezte veličiny, kterými budete verifikovat princip reciprocity pro zdroje proudu.
3. Uveďte, jaké metody použijete k analýze obvodu.
4. Odvoďte rovnice k ověření principu reciprocity pro zdroje proudu.
5. Prokažte platnost principu reciprocity pro zdroje proudu.



### KLÍČ K ŘEŠENÍ

1. Ve schématu zapojení na obr. 11.3 zaměníme zdroje napětí zdroji proudu.
2. Princip reciprocity pro zdroje proudu budeme verifikovat napětím rezistoru  $R_2$  a  $R_1$ .
3. K analýze obvodu použijeme princip superpozice a metodu postupného zjednodušování.
4. Diskutovaný princip reciprocity posoudíme vymezením napětí rezistoru  $R_2$  při napájení ze zdroje proudu  $I_{o1}$ .
5. Postupujte podle řešeného příkladu.



### TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů II. Skriptum ČVUT Praha 2004, článek 1.5.



### Studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 4.1.



### Zadání samostatné práce

Verifikujte princip reciprocity pro zdroje proudu nebo napětí přemístěním jednoho ze zdrojů do větve s rezistorem  $R_3$ .

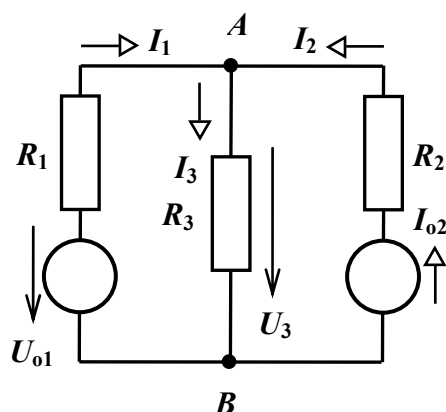
### 11.3. Princip kompenzace



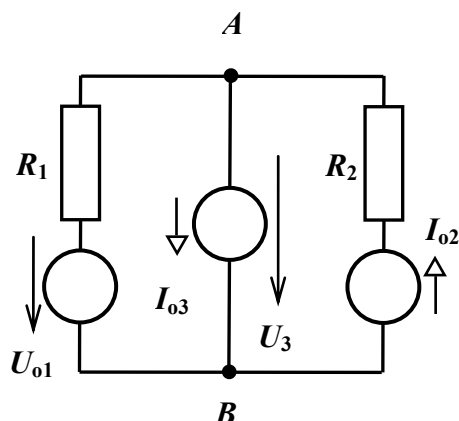
#### VÝKLAD

Princip kompenzace je založen na platnosti Kirchhoffových zákonů, protože z hlediska sčítání napětí ve smyčkách je lhostejné, jakého původu jsou svorková napětí a totéž platí pro součet proudů v uzlech.

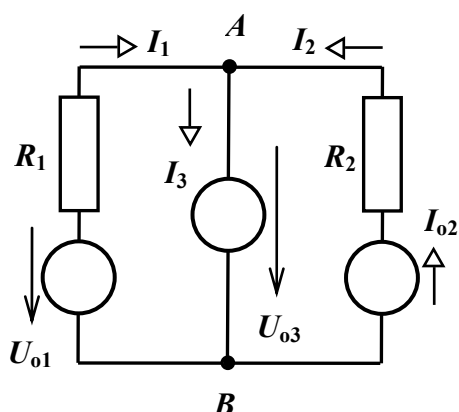
Podle tohoto principu se poměry v obvodu nezmění, jestliže v něm nahradíme kterýkoliv pasivní prvek nezávislým zdrojem napětí, jehož napětí je rovno nahrazovaného prvku nebo zdrojem proudu, jehož proud je roven proudu tohoto prvku. Stejně tak je možné nahradit zdroj rezistorem, jestliže zdroj odebírá výkon z obvodu. V extrémních případech lze zdroj napětí, kterým neprochází proud nahradit rozpojením obvodu - stavem naprázdno a zdroj proudu, na němž nepůsobí žádné napětí zkratem - stavem nakrátko.



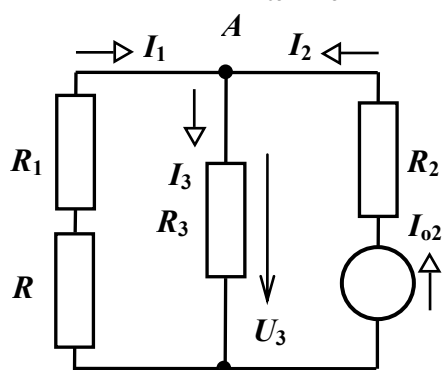
a) původní obvod



b) kompenzace proudu  $I_3$   
zdrojem proudu  $I_{03} = I_3 = 2 \text{ A}$ ,



c) kompenzace napětí  $U_3$   
zdrojem napětí  $U_{03} = U_3 = 6 \text{ V}$



d) kompenzace zdroje napětí  $U_{01}$   
rezistorem  $R = U_{01} \cdot I_1^{-1} = 5,1 = 5 \Omega$

Obr. 11.4 Příklady kompenzace

**Příklad 11.3.**

Aplikujte princip kompenzace v obvodu na obr. 11.4a), je-li zadán parametry  $U_{o1} = 5 \text{ V}$ ,  $I_{o2} = 3 \text{ A}$ ,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 3 \Omega$  a jeho analýzou byly stanoveny korektní hodnoty obvodových veličin:  $I_1 = -1 \text{ A}$ ,  $I_2 = 3 \text{ A}$ ,  $I_3 = 2 \text{ A}$ ,  $U_3 = 6 \text{ V}$ .

**Řešení:**

V obr. 11.4b) je hodnota proudu  $I_3$  kompenzována zdrojem proudu  $I_{o3}$ , v obr. 11.4c) je hodnota napětí  $U_3$  mezi uzly A, B kompenzována zdrojem napětí  $U_{o3}$  a v obr. 11.4d) je zdroj napětí, který se chová jako spotřebič kompenzován rezistorem  $R$ , aniž se změní poměry v obvodu.

Pozn. V extrémním případě bychom mohli kompenzovat všechny tři proudy zdroji proudu, ale dva z nich by se chovali jako spotřebič, totéž platí pro zdroje napětí, nebo i jakoukoliv jinou korektní kombinaci zdrojů.

**Shrnutí pojmů 11.3.**

Princip kompenzace vychází z Kirchhoffových zákonů. Proud kompenzujeme zdrojem proudu, napětí zdrojem napětí, spotřebu výkonu rezistorem.

**Otázky 11.3.**

1. Uveďte zákony, na nichž je založen princip kompenzace.
2. Vymezte prvek, jímž kompenzujeme proud větve.
3. Vymezte prvek, jímž kompenzujeme napětí mezi dvěma uzly.
4. Vymezte prvek, jímž kompenzujeme zdroj, který odebírá výkon.
5. Stanovte způsob kontroly správnosti analýzy obvodů, v nichž byla realizována kompenzace.

**Úlohy k řešení 11.3.**

1. Ověřte korektnost kompenzace proudu v příkladu.
2. Ověřte korektnost kompenzace napětí v příkladu.
3. Ověřte korektnost kompenzace spotřeby výkonu zdroje napětí  $U_{o1}$  v příkladu.

**Klíč k řešení**

Korektní výsledky řešení jsou v zadání příkladu.



## TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, článek 3.7.



## Studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 4.1.



## VIRTUÁLNÍ LABORATOŘ

Doplňující virtuální laboratoř:  
11\_1\_Superpozice\_reseny\_priklad.xls

## 12. ROVNOCENNOST (EKVIVALENCE) GENERÁTORŮ



**Čas ke studiu:** 1 hodina



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- posoudit rovnocennost generátorů

### 12.1. Teorémy o náhradních generátorech

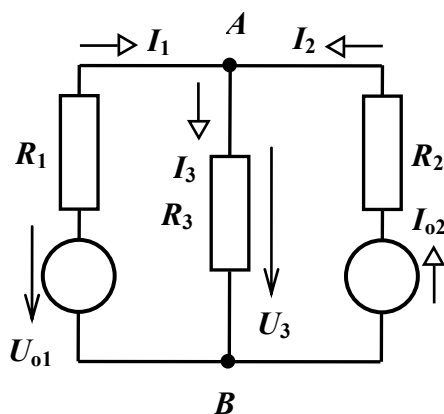


#### VÝKLAD

Každý lineární obvod můžeme z hlediska námi vybraných svorek (označíme je např. A, B) nahradit buď generátorem napětí, tj. sériovým zapojením zdroje napětí a pasivního prvku, (Théveninův teorém) nebo generátorem proudu, tj. paralelním zapojením zdroje proudu a pasivního prvku, (Nortonův teorém). Teorie náhrady je probrána v základním textu, v této kapitole se budeme zabývat rovnocenností (ekvivalencí) náhrady. Její posouzení je nejvhodnější na konkrétním příkladě.

#### Příklad 12.1.

Nahradte obvod z hlediska svorek A, B náhradním generátorem napětí a proudu v obvodu na obr. 1, je-li  $U_{o1} = 5 \text{ V}$ ,  $I_{o2} = 3 \text{ A}$ ,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 3 \Omega$  a posuďte ekvivalenci z hlediska zátěže a generátorů.

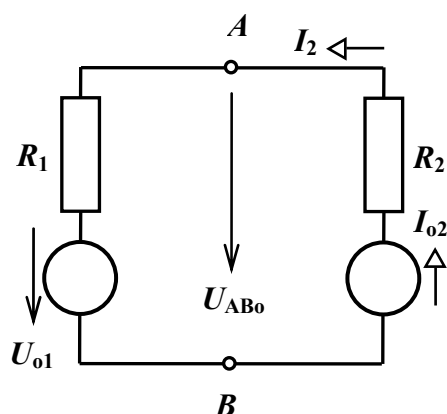


**Obr. 12.1** Schéma zapojení pro stanovení parametrů generátorů.



#### Řešení:

Nejdříve určíme napětí svorek A, B ve stavu naprázdno (obr. 12.2) tím, že odpojíme rezistor  $R_3$



**Obr. 12.2** Schéma zapojení k určení napětí naprázdno.

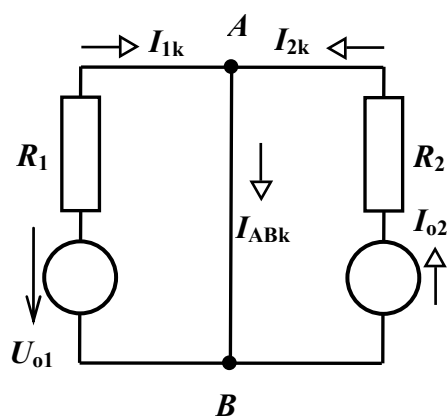
Obvodem na obr. 2 prochází proud

$$I_2 = I_{o2} = 3 \text{ A}$$

a napětí naprázdno určíme z rovnice

$$U_{AB0} = R_1 I_2 + U_{o1} = 1.3 + 5 = 8 \text{ V}.$$

Nyní určíme proud nakrátko v obvodě na obr. 12.3



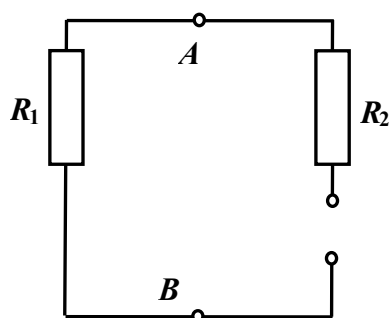
**Obr. 12.3** Schéma zapojení k určení proudu nakrátko.

$$I_{ABk} = I_{1k} + I_{2k} = \frac{U_{o1}}{R_1} + I_{o2} = 5 + 3 = 8 \text{ A}.$$

Hodnotu parametru pasivního prvku určíme z napětí naprázdno a proudu nakrátko

$$G_{AB}^{-1} = R_{AB} = \frac{U_{AB0}}{I_{ABk}} = \frac{8}{8} = 1 \Omega,$$

nebo ze schématu na obr. 12.4



**Obr. 12.4** Schéma zapojení k určení parametru pasivního prvku.

$$R_{AB} = R_1 = 1 \Omega.$$

Tím jsme určili parametry generátorů.

#### □ Posouzení ekvivalence

Náhradní schéma obvodu s generátorem napětí a proudu je na obr. 12.5. Nejdříve určíme napětí rezistoru  $R_3$ . V zapojení s generátorem napětí obr. 12.5a) jeho hodnotu určíme z výrazu pro dělič napětí

$$U_3 = U_{AB0} \frac{R_3}{R_3 + R_{AB}} = 8 \frac{3}{3 + 1} = 6 \text{ V}$$

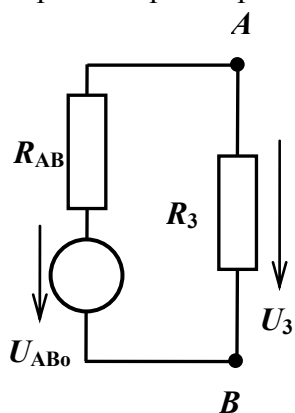
a v zapojení s generátorem proudu z výrazu pro paralelní řazení rezistorů

$$U_3 = I_{ABk} \frac{R_3 R_{AB}}{R_3 + R_{AB}} = 8 \frac{3 \cdot 1}{3 + 1} = 6 \text{ V}.$$

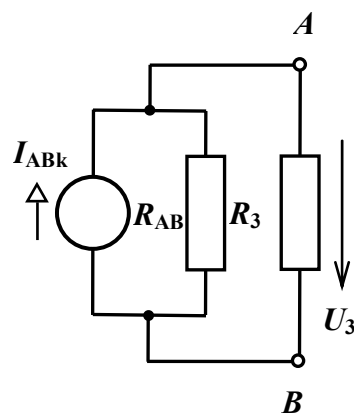
Obě hodnoty napětí jsou stejné, což jsme nicméně očekávali. Pro zátěž je napájení generátorem proudu a generátorem napětí ekvivalentní. Matematicky je podmínka ekvivalence vůči zátěži definována výrazem

$$U_{AB0} = R_{AB} I_{ABk},$$

který byl v příkladě použit pro výpočet odporu generátoru.



**a)** náhradní schéma s generátorem napětí



**b)** náhradní schéma s generátorem proudu

**Obr. 12.5** Náhradní schémata s generátory

Nyní stanovíme výkony zdrojů. Zdroj napětí dodává výkon

$$P_U = \frac{U_{AB0}^2}{R_{AB} + R_3} = \frac{8^2}{1 + 3} = 16 \text{ W}$$

a zdroj proudu

$$P_I = \frac{I_{ABk}^2}{G_{AB} + G_3} = \frac{8^2}{1 + \frac{1}{3}} = 48 \text{ W} .$$

Vypočtené hodnoty jsou různé, což znamená, že pro generátory náhradní zapojení není ekvivalentní. V řešeném případě generátor proudu dodává třikrát větší výkon než generátor napětí, přičemž výkon zátěže je stejný

$$P_3 = \frac{U_3^2}{R_3} = \frac{6^2}{3} = 12 \text{ W} .$$

Pro realizaci generátorů je rozhodující hodnota účinnosti

$$\eta_U = 100 \frac{P_3}{P_U} = 100 \frac{12}{16} = 75 \%$$

$$\eta_I = 100 \frac{P_3}{P_I} = 100 \frac{12}{48} = 25 \%$$



### Shrnutí pojmů 12.1.

Théveninovým a Nortonovým teorémem určíme parametry náhradních zdrojů, to je generátorů, o kterých tvrdíme, že jsou rovnocenné (ekvivalentní). Je však nutné zdůraznit, že jsou ekvivalentní pouze pro zátěž. Pro generátory ekvivalence neplatí. Při realizaci generátorů je rozhodujícím kritériem účinnost.



### Otázky 12.1.

1. Uveďte způsob určení napětí zdroje generátoru napětí.
2. Uveďte způsob určení proudu zdroje generátoru proudu.
3. Uveďte způsob určení parametru pasivního prvku generátoru napětí i proudu.
4. Napište podmínku ekvivalence mezi generátorem napětí a proudu pro zátěž.
5. Posuďte, zda je generátor napětí a generátor proudu ekvivalentní z hlediska generátorů.
6. Vymezte kritérium, které je rozhodující pro realizaci generátorů.



### Úlohy k řešení 12.1.

1. Nakreslete schéma zapojení podle obr. 12.1, v němž zaměníte zdroj proudu a zdroj napětí.
2. Vypočítejte parametry generátorů.

3. Posuďte jejich účinnost.
4. Rozhodněte, který z nich byste realizovali.
5. Ověřte správnost řešení obvodu podle Tellegenovy věty.



### KLÍČ K ŘEŠENÍ

Postupujte podle řešeného příkladu.



### TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, článek 3.7.



### Studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 11



### Zadání samostatné práce

Vypočítejte parametry generátorů pro dvouprvkový dělič napětí.

## 13. HARMONICKÁ OBVODOVÁ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE



**Čas ke studiu:** 1 hodina



**Cíl** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- vypočítat parametry obvodových modelů
- rozlišit řád harmonických
- analyzovat parametry obvodových modelů

### 13.1. Úvod



#### VÝKLAD

Vlastnosti elektrotechnických zařízení nelze nikdy posuzovat přímo, ale pomocí modelů, které vytváříme na základě změřených veličin. V elektrotechnice existují pouze dva druhy měřitelných časových funkcí – okamžité hodnoty proudu a napětí. Změřené střídavé periodické průběhy proudu  $i$  a napětí  $u$ , s dobou periody  $T$ , je výhodné aproximovat konečným součtem harmonických funkcí – tzv. Fourierovou řadou

$$i \doteq \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t \pm \Psi_{i_k}),$$

$$u \doteq \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t \pm \Psi_{u_k}),$$

kde řád harmonické  $k = 1, 2, 3 \dots n$  a kruhový kmitočet  $\omega = 2\pi T^{-1}$ , a harmonické průběhy proudu a napětí reprezentovat komplexními čísly. Podílem komplexní hodnoty  $k$ -té harmonické proudu a napětí matematicky definujeme reálnou a imaginární část komplexní hodnoty imitance, kterou vyjadřujeme součtem její reálné a imaginární části a z nich určujeme obvodové parametry dvouprvkových modelů reálných elektrických zařízení. Doposud je známa metodika vytváření obvodových modelů pouze pro jedinou (obvykle 1.) harmonickou proudu a napětí.

V tomto textu jsou vypočítány hodnoty obvodových parametrů pro dva různé řády harmonických proudu a napětí stávající metodikou. Z jejich porovnání vyplývá, že takto vypočítané hodnoty obvodových parametrů jsou vždy nejednoznačné!

## 13.2. Obvodový model harmonických průběhů proudu a napětí



### VÝKLAD

Z naměřených střídavých neharmonických průběhů proudu a napětí s dobou periody  $T = 20 \text{ ms}$  jsme určili efektivní hodnoty a počáteční fáze 1. a 5. harmonické proudu a napětí:

$$I_1 = 0,8196 \text{ A}, \Psi_{i_1} = 28,6^\circ, U_1 = 227,4 \text{ V}, \Psi_{u_1} = 0^\circ;$$

$$I_5 = 0,5600 \text{ A}, \Psi_{i_5} = 87,6^\circ, U_5 = 7,489 \text{ V}, \Psi_{u_5} = 0^\circ.$$

Doposud jsou nástrojem tvorby modelů reálných zařízení komplexní hodnoty imitancí, jejich reálnou část modelujeme rezistorem a imaginární část buď kapacitorem, nebo induktorem

Podílem komplexní hodnoty  $k$ -té harmonické proudu  $\hat{I}_k$  a napětí  $\hat{U}_k$  jednoznačně definujeme komplexní hodnotu admitance  $\hat{Y}_k$ , kterou modelujeme paralelním řazením maximálně dvou obvodových prvků: rezistoru a buď kapacitoru, nebo induktoru.

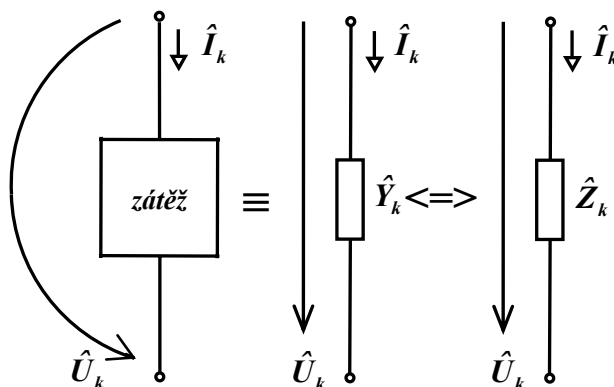
Podílem komplexní hodnoty  $k$ -té harmonické napětí  $\hat{U}_k$  a proudu  $\hat{I}_k$  jednoznačně definujeme komplexní hodnotu impedance  $\hat{Z}_k$ , kterou modelujeme sériovým řazením maximálně dvou obvodových prvků: rezistoru a buď kapacitoru, nebo induktoru.

Komplexní hodnota admitance  $\hat{Y}_k$  a impedance  $\hat{Z}_k$  jsou inverzní

$$\hat{Y}_k \hat{Z}_k = 1$$

a jejich modely obvodových imitancí rovnocenné (ekvivalentní), což obvykle označujeme symbolem  $\Leftrightarrow$  obr. 13.1.

Z vypočítaných komplexních hodnot imitancí pak určujeme hodnoty parametrů lineárních prvků modelů obvodových parametrů pro každou harmonickou proudu a napětí: rezistor obvykle charakterizujeme odporem s parametrem  $R$ , kapacitor kapacitou s parametrem  $C$  a induktor indukčností s parametrem  $L$ .



**Obr. 13.1** Obvodový model harmonického jevu.

Každému ekvivalentnímu modelu obvodových imitancí vždy přísluší ekvivalentní model obvodových parametrů.

Pro rozlišení parametrů ekvivalentních obvodových modelů přiřazujeme parametrům paralelního modelu index „p“ a parametrům sériového modelu index „s“.

### 13.3. Výpočet imitancí a parametrů obvodových modelů

#### □ Výpočet imitancí a parametrů obvodových modelů 1. harmonické proudu a napětí

Komplexní hodnotu admitance vyčíslíme ve složkovém tvaru

$$\hat{Y}_1 = \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_1} = \frac{I_1}{U_1} e^{j(\psi_{i_1} - \psi_{u_1})} = Y_1 \angle \varphi_{Y_1} \doteq 3,60 \cdot 10^{-3} \angle 28,6^\circ = (3,16 + j1,73) \text{ mS}$$

a modelujeme ji paralelním řazením dvou složek admitance, reálnou část vodivosti

$$G_1 = 3,16 \text{ mS}$$

a imaginární část susceptancí

$$B_1 = 1,73 \text{ mS}.$$

Nyní pro vypočítanou hodnotu obvodové admitance určíme hodnoty obvodových parametrů. Je vhodné zdůraznit, že vodivost a susceptance jsou dvě složky komplexní hodnoty obvodové admitance, ale reálná část komplexní hodnoty admitance-vodivost je zároveň i obvodovým parametrem rezistoru, kdežto její imaginární část-susceptance není obvodovým parametrem žádného obvodového prvku. Ve dvousložkovém obvodovém modelu admitance susceptanci pro  $\varphi_Y > 0$  modelujeme kapacitorem, jehož hodnotu obvodového parametru určíme z výrazu

$$C_{p1} = \frac{B_1}{\omega} = 5,50 \text{ } \mu\text{F}.$$

Rovněž i komplexní hodnotu impedance vyčíslíme ve složkovém tvaru. Komplexní hodnota impedance je inverzní komplexní hodnotě admitance

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} = \hat{Y}_1^{-1} = Y_1^{-1} \angle -\varphi_{Y_1} = Z \angle \varphi_{Z_1} \doteq 277,5 \angle -28,6^\circ = (243,6 - j132,8) \Omega$$

a modelujeme ji sériovým řazením dvou složek impedance, reálnou část odporem

$$R_1 = 243,6 \Omega$$

a imaginární část reaktancí

$$X_1 = 132,8 \Omega.$$

Nyní pro vypočítanou hodnotu obvodové impedance určíme hodnoty obvodových parametrů. Je vhodné zdůraznit, že odpor a reaktance jsou dvě složky komplexní hodnoty obvodové impedance, ale reálná část komplexní hodnoty impedance-odpor je zároveň i obvodovým parametrem rezistoru, kdežto její imaginární část-reaktance není obvodovým parametrem žádného obvodového prvku. Ve dvousložkovém obvodovém modelu impedance reaktanci pro  $\varphi_Z < 0$  modelujeme kapacitorem, jehož hodnotu obvodového parametru určíme z výrazu

$$C_{s1} = \frac{1}{\omega X_1} = 23,97 \text{ } \mu\text{F}.$$

Paralelní a sériový model obvodových imitancí i paralelní a sériový model obvodových parametrů 1. harmonické proudu a napětí jsou rovnocenné (ekvivalentní).

#### □ Výpočet imitancí a parametrů obvodových modelů 5. harmonické proudu a napětí

Hodnoty obvodových imitancí a parametrů určíme obdobně

$$\hat{Y}_5 = \frac{\hat{I}_5}{\hat{U}_5} \doteq 74,8 \cdot 10^{-3} \angle 87,6^\circ = (3,13 + j74,73) \text{ mS} \Rightarrow G_5 = 3,13 \text{ mS}, C_{p5} = 47,6 \text{ } \mu\text{F},$$

$$\hat{Z}_5 = \frac{\hat{U}_5}{\hat{I}_5} \doteq 13,4 \angle -87,6^\circ = (0,560 - j13,4) \Omega \Rightarrow R_5 = 0,560 \Omega, C_{s5} = 47,5 \text{ } \mu\text{F}.$$

### 13.4. Diskuze

Porovnejme výsledky předchozí analýzy pro 1. a 5. harmonickou proudu a napětí.

Hodnoty reálných složek admitancí můžeme považovat za shodné

$$G_1 = G_5,$$

zatímco hodnoty reálných složek impedancí jsou rozdílné

$$R_1 = 243,6 \Omega \neq R_5 = 0,560 \Omega.$$

Rozdílné hodnoty reálných složek impedancí pro 1. a 5. harmonickou proudu a napětí jsou pro lineární obvodové modely fyzikálně neodůvodnitelné, protože lineární obvodový model vykazuje shodné hodnoty reálných částí imitancí pro všechny harmonické proudu a napětí. Proto, v daném případě, můžeme prohlásit hodnoty reálných složek impedancí za fyzikálně nekorektní a stejně tak i sériové obvodové modely.

I hodnoty kapacit kapacitorů jsou rozdílné, a to jak v paralelním modelu

$$C_{p1} = 5,50 \text{ } \mu\text{F} \neq C_{p5} = 47,6 \text{ } \mu\text{F},$$

tak i v sériovém modelu

$$C_{s1} = 24,0 \text{ } \mu\text{F} \neq C_{s5} = 47,5 \text{ } \mu\text{F}.$$

Tuto nejednoznačnost lze snadno fyzikálně odůvodnit. Hodnoty kapacit byly vypočítány z hodnot matematicky stanovených imaginárních částí imitancí, jenž vymezují pouze výsledné působení reakci akumulované elektromagnetické energie, kterou je nezbytné obvodově modelovat zároveň kapacitorem i induktorem.

Z diskuse vyplývá, že dvouprvkové obvodové modely elektromagnetických jevů jsou vždy nekorektní.

V souladu s fyzikálními principy a zákony je nezbytné modelovat každý elektromagnetický jev rezistorem, kapacitorem a induktorem, tedy tříprvkovým obvodovým modelem. Elementární obvodový model vytvoříme paralelním a sériovým řazením rezistoru s duálními obvodovými parametry vodivostí  $G$  a odporem  $R$ , kapacitoru s duálními obvodovými parametry kapacitou  $C$  a inverzní kapacitou  $D$  a induktoru s duálními obvodovými parametry inverzní indukčností  $K$  a indukčností  $L$ , ale ani v tomto případě paralelní a sériový model není ekvivalentní.

**Shrnutí pojmů 13.1.**

Harmonickou obvodovou integrální transformací určujeme obvodové parametry náhradního zapojení rezistoru, kapacitoru a induktoru pro střídavé neharmonické průběhy proudu a napětí. Z analýzy jednoznačně vyplývá, že obecně neplatí ekvivalence mezi paralelním a sériovým obvodovým modelem elektromagnetického jevu.

**Otázky 13.1.**

1. Uveďte pro jaké hodnoty proudu a napětí definujeme imitance.
2. Nakreslete ekvivalentní obvodový model imitancí pro jednu harmonickou proud a napětí.

**Úlohy k řešení 13.1.**

1. Odůvodněte, proč neplatí ekvivalence mezi sériovým a paralelním modelem elektromagnetického jevu pro dvě harmonické proud a napětí.

**KLÍČ K ŘEŠENÍ**

V plné rozsahu vám vyhoví tento text.

**TEXT K PROSTUDOVÁNÍ**

[1] Kijonka, J., Beňová, M.: Expertíza lineárních obvodových modelů střídavých elektromagnetických jevů. 7 str. Tato publikace byla vytvořena v rámci spolupráce Mezinárodního vědeckého týmu doktorandů.

## 14. NEHARMONICKÁ OBVODOVÁ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE



**Čas ke studiu:** 3 hodiny



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- posoudit obvodové parametry
- verifikovat obvodové parametry
- analyzovat složky výkonu

### 14.1. Úvod



#### VÝKLAD

Vlastnosti elektrotechnických zařízení nelze nikdy posuzovat přímo, ale pomocí modelů, které vytváříme na základě změřených veličin. V elektrotechnice existují pouze dva druhy měřitelných časových funkcí – okamžité hodnoty proudu a napětí. Změřené střídavé periodické průběhy proudu  $i$  a napětí  $u$ , s dobou periody  $T$ , je výhodné aproximovat konečným součtem harmonických funkcí – tzv. Fourierovou řadou

$$i \doteq \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t \pm \Psi_{i_k}),$$

$$u \doteq \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t \pm \Psi_{u_k}),$$

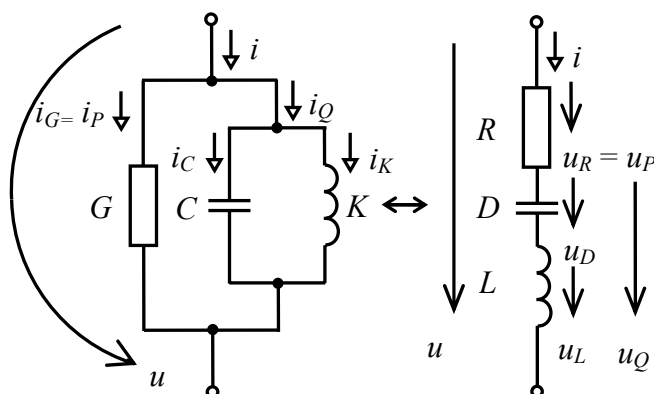
kde řád harmonické  $k = 1, 2, 3 \dots n$  a kruhový kmitočet  $\omega = 2\pi T^{-1}$ , a harmonické průběhy proudu a napětí reprezentovat komplexními čísly. Podílem komplexní hodnoty  $k$ -té harmonické proudu a napětí matematicky definujeme reálnou a imaginární část komplexní hodnoty imitance, kterou vyjadřujeme součtem její reálné a imaginární části. Neharmonická obvodová integrální transformace byla odvozena pro dva řády harmonických, které jsou v textu rozlišeny indexy a, b.

### 14.2. Náhradní schéma elektromagnetického jevu



#### VÝKLAD

V souladu s fyzikálními principy a zákony je nezbytné modelovat každý elektromagnetický jev rezistorem, kapacitorem a induktorem, tedy tříprvkovým obvodovým modelem, Elementární obvodový model vytvoříme paralelním a sériovým řazením rezistoru s duálními obvodovými parametry vodivostí  $G$  a odporem  $R$ , kapacitoru s duálními obvodovými parametry kapacitou  $C$  a inverzní kapacitou  $D$  a induktoru s duálními obvodovými parametry inverzní indukčností  $K$  a indukčností  $L$  obr. 14.1.



**Obr. 14.1** Obvodový model střídavého neharmonického jevu.

#### □ Definice obvodových parametrů

Obvodové parametry rezistoru definujeme podílem střední hodnoty konané práce a předpokládané střední hodnoty práce konané rezistorem s jednotkovou hodnotou obvodového parametru buď  $G = 1 \text{ S}$ , nebo  $R = 1 \Omega$  výrazy pro vodivost

$$G = \frac{P}{U^2}$$

a odpor

$$R = \frac{P}{I^2},$$

příčemž střední hodnotu konané práce-činný výkon definujeme výrazem

$$P = \sum_{k=1}^n P_k = U_k I_k \cos \varphi_k$$

a střední hodnotu práce konané rezistorem s jednotkovou hodnotou obvodového parametru - druhou mocninu efektivní hodnoty veličiny

$$V^2 = \sum_{k=1}^n V_k^2 = \frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt.$$

Hodnoty obvodových parametrů kapacitoru a induktoru získáme z vyjádření komplexních hodnot imitancí ve složkovém tvaru pro dvě různé harmonické  $a, b$  Fourierovy řady.

V paralelním modelu z výrazů pro susceptance

$$\text{Im}\{\hat{Y}_a\} = B_a = B_{aC} - B_{aK} = a\omega C - \frac{K}{a\omega}$$

$$\text{Im}\{\hat{Y}_b\} = B_b = B_{bC} - B_{bK} = b\omega C - \frac{K}{b\omega}$$

definujeme výraz pro kapacitu

$$C = \omega^{-1} \frac{aB_a - bB_b}{a^2 - b^2}$$

a inverzní indukčnost

$$K = \omega ab \frac{bB_a - aB_b}{a^2 - b^2}.$$

V sériovém modelu z výrazu pro reaktance

$$\operatorname{Im}\{\hat{Z}_a\} = X_a = X_{aL} - X_{aD} = a\omega L - \frac{D}{a\omega}$$

$$\operatorname{Im}\{\hat{Z}_b\} = X_b = X_{bL} - X_{bD} = b\omega L - \frac{D}{b\omega}$$

definujeme výraz pro indukčnost

$$L = \omega^{-1} \frac{aX_a - bX_b}{a^2 - b^2}$$

a inverzní kapacitu

$$D = \omega ab \frac{bX_a - aX_b}{a^2 - b^2}.$$

#### □ Verifikace obvodových parametrů

Z určených lineárních hodnot obvodových parametrů vypočítáme podle 1. Kirchhoffova zákona algebraický součet okamžitých hodnot složek proudu

$$i_{\text{mo}} = i_G + i_C + i_K = Gu + Cu' + Ku^x = i_P + i_Q,$$

kde aktivní složka proudu  $i_P = i_G = Gu$  a reaktivní složka proudu  $i_Q = i_C + i_K = Cu' + Ku^x$ .

Zároveň vypočítáme podle 2. Kirchhoffova zákona algebraický součet okamžitých hodnot složek napětí

$$u_{\text{mo}} = u_R + u_L + u_D = Ri + Li' + Di^x = u_P + u_Q \text{ kde aktivní složka napětí } u_P = u_G = Ri \text{ a reaktivní složka napětí } u_Q = u_L + u_D = Li' + Di^x.$$

Vypočítané hodnoty proudu  $i_{\text{mo}}$  a napětí  $u_{\text{mo}}$  porovnáme se známými okamžitými hodnotami proudu  $i$  a napětí  $u$  rovnicemi

$$i_{\text{sc}} = i - i_{\text{mo}}$$

$$u_{\text{sc}} = u - u_{\text{mo}}$$

Tím definujeme nedokonalost paralelního modelu okamžitými hodnotami nedokonalosti proudu  $i_{\text{sc}}$  a nedokonalost sériového modelu okamžitými hodnotami nedokonalosti napětí  $u_{\text{sc}}$ . Jejich průběhy zobrazíme ve virtuální laboratoři obr. 3, obr. 4, expertně posoudíme a rozhodneme, který model budeme považovat za nekorektní.

Pro expertní posouzení korektnosti identifikovaných parametrů prvků přímo virtuální laboratoří vypočítáme efektivní hodnoty příslušných veličin a verifikujeme podle hodnot činitele nedokonalosti

proudu

$$\text{SCF}_I = 100 \frac{I_{\text{sc}}}{I}$$

a napětí

$$\text{SCF}_U = 100 \frac{U_{\text{sc}}}{U}.$$

### 14.3. Integrální hodnoty

Integrální hodnotou jednoznačně reprezentujeme okamžité hodnoty periodického průběhu na době periody.

#### □ Integrální hodnota proudu

Integrální hodnotu algebraického součtu složek proudu obdržíme z výrazu

$$\begin{aligned} I_{\text{mo}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_{\text{mo}}^2 \cdot dt} = \sqrt{I_G^2 + I_C^2 + I_K^2 - 2CKU^2} = \\ &= \sqrt{(GU)^2 + (CU')^2 + (KU^x)^2 - 2CKU^2} = \\ &= \sqrt{I_P^2 + I_Q^2}, \end{aligned}$$

kde aktivní složka efektivní hodnoty složek proudu  $I_P = I_G$  a reaktivní složka efektivní složek hodnoty proudu  $I_Q = \sqrt{(CU')^2 + (KU^x)^2 - 2CKU^2}$ .

#### □ Integrální hodnota napětí

Efektivní hodnotu složek napětí určíme z výrazu

$$\begin{aligned} U_{\text{mo}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_{\text{mo}}^2 \cdot dt} = \sqrt{U_R^2 + U_L^2 + U_D^2 - 2LDI^2} = \\ &= \sqrt{(RI)^2 + (LI')^2 + (DU^x)^2 - 2LDI^2} = \\ &= \sqrt{U_P^2 + U_Q^2}, \end{aligned}$$

kde aktivní složka efektivní hodnoty složek napětí

$$U_P = U_R \text{ a reaktivní složka efektivní hodnoty složek napětí } U_Q = \sqrt{(LI')^2 + (DU^x)^2 - 2LDI^2}.$$

Poznámka: Efektivní hodnotu derivace veličiny podle času určíme výrazem

$$V' = \omega \sqrt{\sum_{k=1}^n (kV_k)^2}$$

a efektivní hodnotu integrálu veličiny podle času výrazem

$$V^x = \omega^{-1} \sqrt{\sum_{k=1}^n (k^{-1}V_k)^2}.$$

### □ Úprava výrazu pro reaktivní složku

Ve výrazu pro reaktivní složku efektivní hodnoty složek proudu

$$I_Q = \sqrt{(CU')^2 + (KU^x)^2 - 2CKU^2}$$

rozšíříme třetí člen efektivní hodnotou derivace napětí podle času  $U'$  a efektivní hodnotou integrálu napětí podle času  $U^x$  a následně upravíme do tvaru

$$\begin{aligned} I_Q &= \sqrt{(CU')^2 + (KU^x)^2 - 2CU'KU^x} \frac{U^2}{U'U^x} = \\ &= \sqrt{I_C^2 + I_K^2 - 2I_C I_K \cos \varepsilon_u} \quad , \end{aligned}$$

který představuje geometrický součet efektivní hodnoty proudu kapacitoru a efektivní hodnoty proudu induktoru podle kosinusové věty. Aktivní a reaktivní složku efektivní hodnoty složek proudu sečítáme geometricky podle Pythagorovy věty

$$I_{as} = \sqrt{I_P^2 + I_Q^2} \quad .$$

Obdobně lze upravit reaktivní složku napětí.

## 14.4. Okamžité a integrální hodnoty složek výkonů

Pro známé hodnoty lineárních obvodových parametrů pak vypočítáme algebraický součet okamžitých hodnot složek výkonu  $p_{mo}$  součinem okamžitých hodnot složek proudu  $i_{mo}$  a okamžitých hodnot napětí  $u$

$$\begin{aligned} p_{mo} &= i_{mo}u = Gu^2 + Cu'u + Ku^xu = \\ &= p_G + p_C + p_K = p_P + p_Q \quad , \end{aligned}$$

kde aktivní složka výkonu  $p_P = p_G = Gu^2$  a reaktivní složka výkonu  $p_Q = p_C + p_K = Cu'u + Ku^xu$  .

Algebraický součet okamžitých hodnot složek výkonu  $p_{mo}$  jednoznačně reprezentujeme geometrickým součtem složek výkonu  $P_{mo}$ , který definujeme součinem efektivní hodnoty složek proudu  $I_{mo}$  a efektivní hodnoty napětí  $U$  výrazem

$$\begin{aligned} P_{mo} &= I_{mo}U = \\ &= \sqrt{P_G^2 + P_C^2 + P_K^2 - 2P_C P_K \cos \varepsilon_u} = \sqrt{P_P^2 + P_Q^2} \quad , \end{aligned}$$

Obdobným způsobem stanovíme výkony sériového obvodového modelu.

## 14.5. Závěr

Vyjádření střídavých veličin a následně výkonu do složek je možné pouze pro lineární hodnoty obvodových parametrů rezistoru, induktoru a kapacitoru. Obecně, tj. i pro nelineární hodnoty obvodových parametrů, lze fyzikálně odůvodnit činnou složku výkonu  $P_P$  jako

střední hodnotu vykonané práce  $A(J)$  na časovém intervalu  $J \in \langle a, b \rangle$  rovnajícímu se celočíselnému násobku doby periody střídavého průběhu  $b - a = nT = J$  výrazem

$$P_p = \frac{A(nT)}{nT} = \frac{1}{nT} \int_a^{a+nT} p \cdot dt = \frac{(i, u)}{nT},$$

kde zápisem  $(i, u)$  označujeme skalární součin časových funkcí duálních veličin - proudu  $i$  a napětí  $u$ . Součinem efektivních hodnot proudu  $I$  a napětí  $U$  pak matematicky definujeme (zdánlivý) výkon  $P, (S)$

$$P = IU$$

a fiktivní složku výkonu  $P_F, (F)$

$$P_F = \sqrt{P^2 - P_p^2}.$$

Podílem činné složky výkonu a výkonu Steinmetz definoval činitel činného výkonu (power factor  $\lambda$ )

$$\lambda_p = \frac{P_p}{P}$$

a Depenbrock činitel fiktivního výkonu

$$\lambda_F = \frac{P_F}{P}.$$

Vyjádření výkonu běžně používanou rovnicí

$$P^2 = P_p^2 + P_F^2$$

není doprovázeno vyjádřením okamžitého výkonu součtem aktivní a fiktivní složky okamžitého výkonu.

Z předchozích rozborů vyplývá, že v lineárních obvodech je fiktivní složka výkonu totožná s reaktivní složkou výkonu a zároveň lze fyzikálně odůvodnit i (zdánlivý) výkon geometrickým průměrem ze středních hodnot prací vykonaných na jednotkové hodnotě odporu a jednotkové hodnotě vodivosti rezistoru

$$P = \sqrt{I^2 U^2} = \sqrt{\frac{(i, u)}{nT} \cdot \frac{(i, u)}{nT}} = \sqrt{\frac{(i, Ri)}{nT} \cdot \frac{(Gu, u)}{nT}} \sqrt{\frac{(i, i)}{nT} \cdot \frac{(u, u)}{nT}}.$$

Pokud nemůžeme prokázat linearitu parametrů obvodu, jsou (zdánlivý) výkon a jeho fiktivní složka vymezeny pouze účelově a v důsledku toho i činitelé výkonu.

#### Příklad 14.1.

Určete hodnoty obvodových parametrů obvodového modelu střídavého neharmonického jevu pro naměřené střídavé neharmonické průběhy proudu (obr. 2)) a napětí (obr. 3a)) s dobou

periody  $T = 20$  ms, reprezentované efektivními hodnotami a počátečními fázemi 1. a 5. harmonické proudu a napětí:

$$I_1 = 0,8196 \text{ A}, \Psi_{i_1} = 28,6^\circ, U_1 = 227,4 \text{ V}, \Psi_{u_1} = 0^\circ;$$

$$I_5 = 0,5600 \text{ A}, \Psi_{i_5} = 87,6^\circ, U_5 = 7,489 \text{ V}, \Psi_{u_5} = 0^\circ.$$

Verifikujte, zda platí paralelní nebo sériový model.



### Řešení:

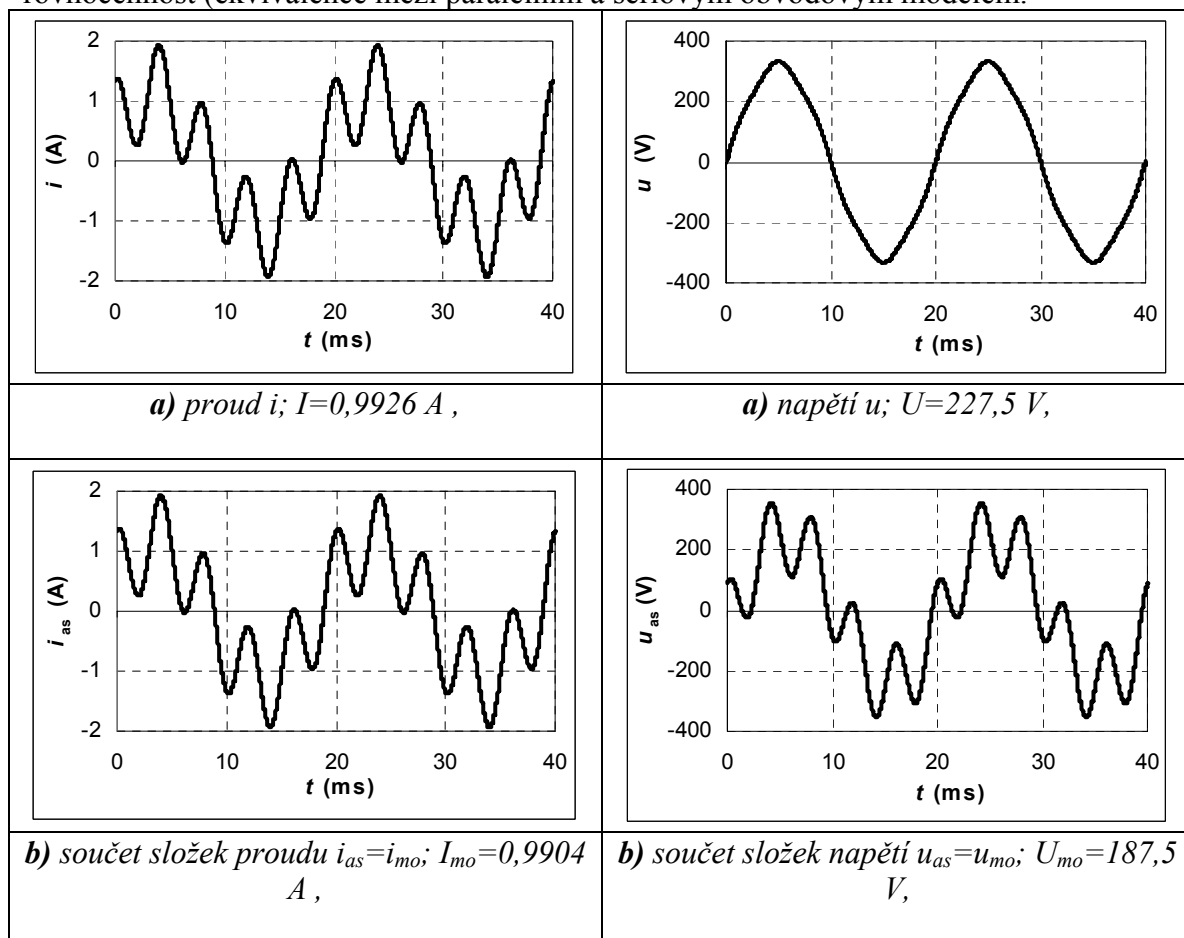
Úlohu je nejvhodnější řešit pomocí virtuální laboratoře: Obdržíme hodnoty parametrů paralelního modelu

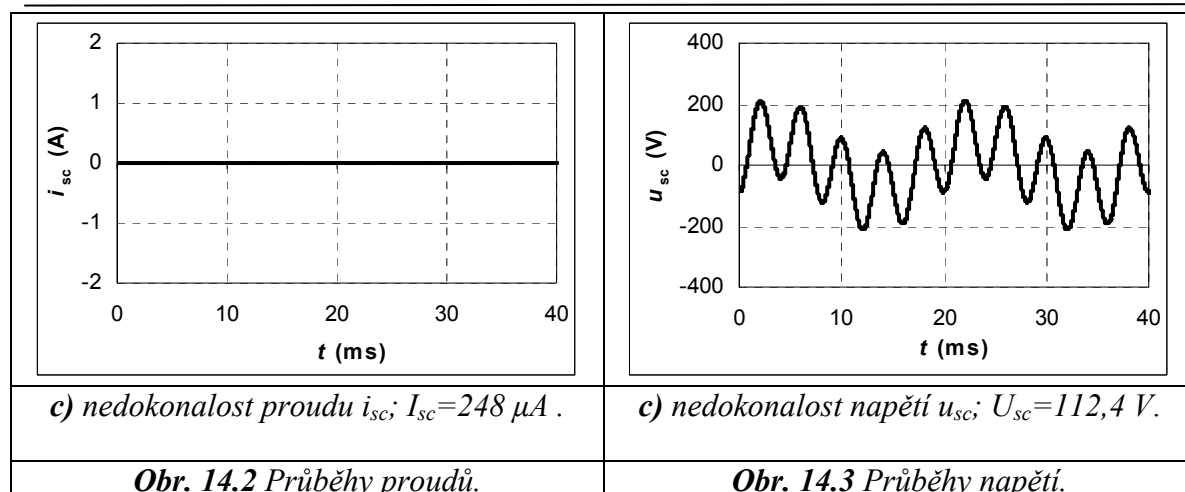
$$G = 3,16 \text{ mS}, C = 49,3 \mu\text{F}, K = 4,33 \text{ H}^{-1}$$

a sériového modelu

$$R = 166 \Omega, L = 8,75 \text{ mH} \text{ a } D = 42,6 \text{ kF}^{-1}.$$

Vypočtené hodnoty verifikujeme průběhy proudu v obr. 14.2 b) a napětí v obr. 14.3 b), z nichž je evidentní, že sériové parametry nemohou být modelem diagnostikovaného jevu. Z toho také vyplývá, že pro neharmonické průběhy proudu a napětí obecně neplatí rovnocennost (ekvivalence mezi paralelním a sériovým obvodovým modelem).





### Shrnutí pojmů 14.1.

Harmonickou obvodovou integrální transformací určujeme obvodové parametry náhradního zapojení rezistoru, kapacitoru a induktoru pro střídavé neharmonické průběhy proudu a napětí. Z analýzy jednoznačně vyplývá, že obecně neplatí ekvivalence mezi paralelním a sériovým modelem.



### Otázky 14.1.

1. Nakreslete duální obvodový model střídavého neharmonického jevu.
2. Vyznačte ve schématu počítačí šipky okamžitých hodnot proudu a napětí.
3. Sestavte pro ně rovnice podle Kirchhoffových zákonů.
4. Popište způsob verifikace korektnosti obvodových modelů.



### Úlohy k řešení 14.1.

1. Otevřete si virtuální laboratoř pro neharmonickou obvodovou integrální transformaci.
2. Zadejte hodnoty dvou harmonických proudu a napětí.
3. Posuďte platnost obvodových modelů.



### KLÍČ K ŘEŠENÍ

V plné rozsahu vám vyhoví virtuální laboratoř.



## TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] Kijonka, J., Beňová, M.: Expertíza lineárních obvodových modelů střídavých elektromagnetických jevů. 7 str., VŠB TU 2005. Publikace byla vytvořena v rámci spolupráce Mezinárodního vědeckého týmu doktorandů.



## Zadání samostatné práce

Ve virtuální laboratoři naleznete parametry střídavých neharmonických průběhů proudu a napětí, zobrazte příslušné průběhy a písemně je posuďte.



## VIRTUÁLNÍ LABORATOŘ

Doplňující virtuální laboratoř:

14\_1\_Neharm\_obv\_transf.xls

## 15. OBECNÁ OBVODOVÁ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE



**Čas ke studiu:** 2 hodiny



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- použít parametry obvodových modelů
- analyzovat obvodové parametry paralelního modelu
- analyzovat obvodové parametry sériového modelu

### 15.1. Úvod



#### VÝKLAD

Parametry obvodových modelů elektromagnetických jevů pro známé okamžité hodnoty proudu  $i$  a napětí  $u$  modelujeme důslednou aplikací tří fyzikálních zákonů, které nazýváme

1. Ohmův zákon,
2. Faradayův zákon,
3. rovnice kontinuity.

Ohmův zákon se týká závislosti proudu a napětí, Faradayův zákon závislosti derivace proudu podle času a napětí, rovnice kontinuity závislosti proudu a derivace napětí podle času.

### 15.2. Náhradní schéma elektromagnetického jevu



#### VÝKLAD

Při tvorbě obvodového modelu elektromagnetického jevu vyjadřujeme buď proud  $i$  součtem složky proudu rezistoru, kapacitoru a induktoru, čímž modelujeme obvodovou rovnici proudu

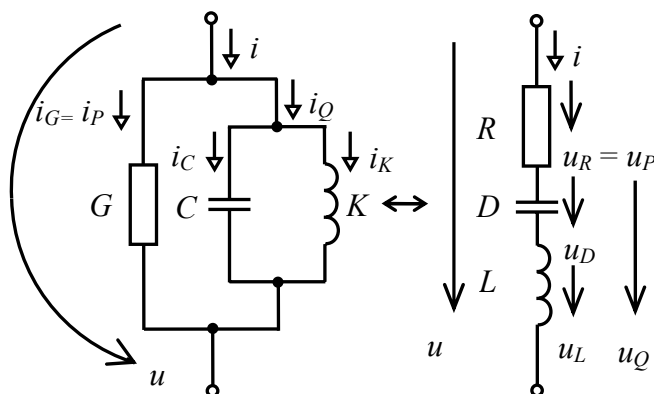
$$i = i_G + i_C + i_K = Gu + Cu' + Ku^x \quad (1-i)$$

paralelního zapojení rezistoru, kapacitoru a induktoru s obvodovými parametry  $G$ ,  $C$ ,  $K$ , nebo napětí  $u$  součtem složky napětí rezistoru, induktoru a kapacitou, čímž modelujeme obvodovou rovnici napětí

$$u = u_R + u_L + u_D = Ri + Li' + Di^x \quad (2-u)$$

sériového zapojení rezistoru, kapacitoru a induktoru s obvodovými parametry  $R$ ,  $L$ ,  $D$ , viz obr. 15.1.

Složkový obvodový model elektromagnetického jevu lze v souladu s Kirchhoffovými zákony vytvořit buď pro společné napětí paralelním zapojením obvodových prvků, nebo pro společný proud sériovým zapojením obvodových prvků.



**Obr. 15.1** Obvodový model střídavého neharmonického jevu.

Obvodová rovnice proudu a obvodová rovnice napětí jsou duální

$$(1 - i) \leftrightarrow (2 - u).$$

Principem duality rozlišujeme šest obvodových parametrů

$$G \leftrightarrow R, \quad C \leftrightarrow L, \quad K \leftrightarrow D \quad !$$

Běžně jsou rozlišovány pouze čtyři obvodové parametry

$$G \leftrightarrow R, \quad C \leftrightarrow L,$$

ale takovýto přístup není v souladu s fyzikálními zákony a principy, což vede k nekorektním výsledkům.

### 15.3. Syntéza obecné obvodové integrální transformace

Hodnoty obvodových parametrů určíme obvodovou integrální transformací proudu  $i$  a napětí  $u$  na libovolném časovém intervalu  $J \in \langle a, b \rangle$ .

Pro určení neznámých hodnot obvodových parametrů jsme transcendentní obvodovou rovnicí proudu a napětí stanovili prvky vektoru báze funkce napětí  $\mathbf{b}_u(u, u', u'')$  a prvky vektoru báze funkce proudu  $\mathbf{b}_i(i, i', i'')$ .

□ **Definice obvodových parametrů paralelního modelu**

Parametry paralelního modelu stanovíme tak, že transcendentní rovnici proudu postupně násobíme prvky vektoru báze funkce napětí a následně součiny integrujeme podle času na libovolném časovém intervalu, tím obdržíme soustavu algebraických rovnic

$$\int_a^b iu \cdot dt = G(u, u) + C(u', u) + K(u^x, u) = (i, u),$$

$$\int_a^b iu' \cdot dt = G(u, u') + C(u', u') + K(u^x, u') = (i, u'),$$

$$\int_a^b iu^x \cdot dt = G(u, u^x) + C(u', u^x) + K(u^x, u^x) = (i, u^x),$$

kde symbolem  $(\cdot, \cdot)$  jsou označeny skalární součiny časových funkcí.

Soustavu algebraických rovnic zapíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} (u, u) & (u', u) & (u^x, u) \\ (u, u') & (u', u') & (u^x, u') \\ (u, u^x) & (u', u^x) & (u^x, u^x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G \\ C \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (i, u) \\ (i, u') \\ (i, u^x) \end{bmatrix}$$

a vyřešíme Cramerovým pravidlem, přičemž hodnotu determinantu soustavy  $\Delta$  a subdeterminantů  $\Delta_G$ ,  $\Delta_C$ ,  $\Delta_K$  určíme známým způsobem

$$\Delta = \begin{vmatrix} (u, u) & (u', u) & (u^x, u) \\ (u, u') & (u', u') & (u^x, u') \\ (u, u^x) & (u', u^x) & (u^x, u^x) \end{vmatrix}, \quad \Delta_C = \begin{vmatrix} (u, u) & (i, u) & (u^x, u) \\ (u, u') & (i, u') & (u^x, u') \\ (u, u^x) & (i, u^x) & (u^x, u^x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} (i, u) & (u', u) & (u^x, u) \\ (i, u') & (u', u') & (u^x, u') \\ (i, u^x) & (u', u^x) & (u^x, u^x) \end{vmatrix}, \quad \Delta_K = \begin{vmatrix} (u, u) & (u', u) & (i, u) \\ (u, u') & (u', u') & (i, u') \\ (u, u^x) & (u', u^x) & (i, u^x) \end{vmatrix}.$$

Potom

$$G = \frac{\Delta_G}{\Delta}, \quad C = \frac{\Delta_C}{\Delta}, \quad K = \frac{\Delta_K}{\Delta}.$$

### □ Definice obvodových parametrů sériového modelu

Parametry sériového modelu stanovíme analogicky tak, že transcendentní rovnici napětí postupně násobíme prvky vektoru báze funkce proudu, integrujeme podle času na libovolném časovém intervalu, čímž obdržíme soustavu algebraických rovnic

$$\int_a^b u i \cdot dt = R \cdot (i, i) + L \cdot (i', i) + D \cdot (i^x, i) = (u, i),$$

$$\int_a^b u i' \cdot dt = R \cdot (i, i') + L \cdot (i', i') + D \cdot (i^x, i') = (u, i'),$$

$$\int_a^b u i^x \cdot dt = R \cdot (i, i^x) + L \cdot (i', i^x) + D \cdot (i^x, i^x) = (u, i^x),$$

kterou zapíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} (i, i) & (i', i) & (i^x, i) \\ (i, i') & (i', i') & (i^x, i') \\ (i, i^x) & (i', i^x) & (i^x, i^x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \\ L \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u, i) \\ (u, i') \\ (u, i^x) \end{bmatrix}$$

a vyřešíme Cramerovým pravidlem, přičemž hodnotu determinantu soustavy  $\Delta$  a subdeterminantů  $\Delta_R$ ,  $\Delta_L$ ,  $\Delta_D$  určíme opět známým způsobem

$$\Delta = \begin{vmatrix} (i, i) & (i', i) & (i^x, i) \\ (i, i') & (i', i') & (i^x, i') \\ (i, i^x) & (i', i^x) & (i^x, i^x) \end{vmatrix}, \quad \Delta_L = \begin{vmatrix} (i, i) & (u, i) & (i^x, i) \\ (i, i') & (u, i') & (i^x, i') \\ (i, i^x) & (u, i^x) & (i^x, i^x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_R = \begin{vmatrix} (u, i) & (i', i) & (i^x, i) \\ (u, i') & (i', i') & (i^x, i') \\ (u, i^x) & (i', i^x) & (i^x, i^x) \end{vmatrix}, \quad \Delta_D = \begin{vmatrix} (i, i) & (i', i) & (u, i) \\ (i, i') & (i', i') & (u, i') \\ (i, i^x) & (i', i^x) & (u, i^x) \end{vmatrix}.$$

Potom

$$R = \frac{\Delta_R}{\Delta}, \quad L = \frac{\Delta_L}{\Delta}, \quad D = \frac{\Delta_D}{\Delta}.$$



### Shrnutí pojmů 15.1.

Obecnou obvodovou integrální transformací určujeme obvodové parametry náhradního zapojení rezistoru, kapacitoru a induktoru pro střídavé neharmonické průběhy proudu a napětí na libovolném časovém intervalu  $J$ , nebo na libovolném počtu vzorků  $n > 2$ . Z analýzy jednoznačně vyplývá, že obecně neplatí ekvivalence mezi paralelním a sériovým modelem.

**Otázky 15.1.**

1. Nakreslete duální obvodový model střídavého neharmonického jevu.
2. Vyznačte ve schématu počítací šipky okamžitých hodnot proudu a napětí.
3. Sestavte pro ně rovnice podle Kirchhoffových zákonů.
4. Uveďte způsob výpočtu hodnot obvodových parametrů.
5. Popište způsob verifikace vypočítaných obvodových parametrů.

**Úlohy k řešení 15.1.**

1. Otevřete si virtuální laboratoř pro neharmonickou obvodovou integrální transformaci.
2. Zadejte hodnoty dvou harmonických proudu a napětí.
3. Posuďte platnost obvodových modelů pro různé počty vzorků.

**KLÍČ K ŘEŠENÍ**

V plné rozsahu vám vyhoví virtuální laboratoř.

**TEXT K PROSTUDOVÁNÍ**

[1] Kijonka, J. Orság, P., Šimandl, L.: Diagnostika elektromagnetického jevu. 40 str., VŠB-TU, 2007. Publikace byla vytvořena v rámci spolupráce Mezinárodního vědeckého týmu doktorandů.

**Zadání samostatné práce**

Ve virtuální laboratoři naleznete parametry střídavých neharmonických průběhů proudu a napětí pro vybraný počet vzorků, zobrazte příslušné průběhy na době dvou period a písemně je posuďte.

**VIRTUÁLNÍ LABORATOŘ**

Doplňující virtuální laboratoř:  
15\_1\_Obecna\_obv\_transf.xls

## 16. ANALÝZA ELEMENTÁRNÍCH OBVODŮ PŘI STŘÍDAVÉM NEHARMONICKÉM NAPÁJENÍ



**Čas ke studiu:** 1 hodina



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- rozlišit algebraický a geometrický součet veličin,
- definovat integrální hodnoty proudu, napětí, výkonu a imitance,
- popsat obvody rovnicemi v souladu s fyzikálními zákony,
- analyzovat elementární obvody při neharmonickém napájení,
- uvést vztah mezi výkonem a imitancí,
- aplikovat virtuální laboratoř pro zadání a analýzu obvodů,
- zobrazit neharmonické průběhy veličin.

### 16.1. Algebraický a geometrický součet veličin



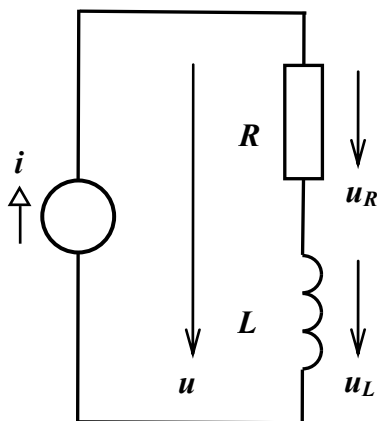
#### VÝKLAD

Rovnice pro okamžité hodnoty proudu a napětí sestavujeme v souladu s platnými zákony. Rovnice pro okamžité hodnoty proudu, napětí a výkonu jsou algebraickým součtem okamžitých hodnot proudu, napětí a výkonu rezistoru, induktoru resp. kapacitoru. Integrální hodnoty proudu, napětí a výkonu jsou geometrickým součtem integrálních hodnot proudu, napětí a výkonu rezistoru (aktivní složka), induktoru resp. kapacitoru (reaktivní složka). Integrální hodnoty aktivní a reaktivní složky sečítáme geometricky podle Pythagorovy věty, zatímco integrální hodnoty složky induktoru a kapacitoru sečítáme geometricky podle kosinové věty a tím obdržíme reaktivní složku (viz kap. Neharmonická obvodová integrální transformace).

#### Příklad 16.1.

*Pro sériové zapojení rezistoru a induktoru napájeného střídavým neharmonickým zdrojem proudu (obr. 16.1) napište rovnice pro:*

- okamžité hodnoty odezvy rezistoru, induktoru, zdroje a jejich efektivní (tj. integrální) hodnoty;*
- okamžité hodnoty výkonu jednotlivých prvků a jejich integrální hodnoty.*



**Obr. 16.1** Sériové zapojení rezistoru a induktoru napájeného střídavým zdrojem neharmonického proudu.

♦  
**Řešení:**

Zdroj proudu vnutí obvodu okamžité hodnoty proudu a připojený obvod vnutí zdroji proudu okamžité hodnoty napětí, které je algebraickým součtem napětí rezistoru a induktoru

$$u = u_R + u_L = Ri + Li',$$

kde  $i' = \frac{di}{dt}$ .

Efektivní hodnota napětí zdroje je geometrickým součtem efektivní hodnoty napětí rezistoru a efektivní hodnoty napětí induktoru

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 = (RI)^2 + (LI')^2,$$

kde  $I'$  je efektivní hodnota derivace proudu podle času.

Proud zdroje a napětí zátěže vnutí zdroji okamžitý výkon, který je algebraickým součtem výkonu rezistoru a induktoru

$$p = ui = (u_R + u_L) \cdot i = p_R + p_L.$$

Integrální hodnota výkonu zdroje je geometrickým součtem integrální hodnoty výkonu rezistoru a i induktoru

$$P^2 = (U_R^2 + U_L^2) \cdot I^2 = P_R^2 + P_L^2.$$

♦  
**Příklad 16.2.**

Pro zvolené číselné hodnoty parametrů pasivních prvků a okamžitých hodnot veličiny zdroje – jsou součtem 1. a  $k$ -té harmonické ( $v = v_1 + v_k$ ) určete číselné hodnoty:

- efektivních hodnot všech veličin;
- integrálních hodnot výkonu a jeho složek, imitancí a jejich složek.

♦

**Řešení:**

Zvolíme si např. hodnoty pasivních prvků

$$R = 2 \, \Omega ; \quad L = \omega^{-1} \, \text{H}$$

a hodnotu proudu zdroje algebraickým součtem okamžitých hodnot 1. a 3. harmonické

$$i = i_1 + i_3$$

s libovolnou hodnotou amplitud, úhlové rychlosti  $\omega$  a nulových počátečních fází, např.

$$i = \sqrt{2} (6 \sin \omega t + 2 \sin 3\omega t) \, \text{A} .$$

Při výpočtech potřebujeme znát derivaci okamžitých hodnot proudu podle času, určíme ji snadno

$$i' = \sqrt{2} (6\omega \cos \omega t + 6\omega \cos 3\omega t) \, \text{As}^{-1} .$$

Potom geometrickým součtem jednotlivých harmonických vypočítáme

efektivní hodnotu proudu

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10} \, \text{A}$$

a efektivní hodnotu derivace proudu podle času

$$I' = \sqrt{(I_1')^2 + (I_3')^2} = \omega \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\omega\sqrt{2} \, \text{As}^{-1} .$$

Z Ohmova zákona napětí rezistoru

$$U_R = RI = 2 \cdot 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10} \, \text{V} .$$

Z Faradayova zákona napětí induktoru

$$U_L = LI' = \omega^{-1} \cdot 6\omega\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \, \text{V}$$

a jejich geometrickým součtem napětí zdroje

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{160 + 72} = 2\sqrt{58} \, \text{V} .$$

Integrální hodnoty výkonu definujeme součinem integrálních (efektivních)

hodnot napětí a proudu. Výkon zdroje

$$P = UI = 2\sqrt{58} \cdot 2\sqrt{10} = 8\sqrt{145} \, \text{VA} ,$$

výkon rezistoru

$$P_R = U_R I = 4\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = 80 \, \text{W}$$

a výkon induktoru

$$P_L = U_L I = 6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{10} = 24\sqrt{5} \, \text{var} .$$

Integrální hodnota výkonu zdroje je zároveň geometrickým součtem integrálních hodnot výkonu rezistoru a induktoru.

Imitanci definujeme podílem výkonu a výkonu obvodového prvku s jednotkovou hodnotou odporu nebo vodivosti rezistoru. V daném případě vymezíme impedance podílem příslušných

výkonů a druhé mocniny efektivní hodnoty proudu (výkonu rezistoru s hodnotou odporu  $R = 1 \Omega$ ).

Impedance zdroje

$$Z = \frac{P}{I^2} = \frac{8\sqrt{145}}{(2\sqrt{10})^2} = \frac{\sqrt{145}}{5} \Omega ,$$

impedance rezistoru

$$Z_R = \frac{P_R}{I^2} = \frac{80}{(2\sqrt{10})^2} = 2 \Omega ,$$

a impedance induktoru

$$Z_L = \frac{P_L}{I^2} = \frac{24\sqrt{5}}{(2\sqrt{10})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Omega .$$

Impedance zdroje je zároveň geometrickým součtem impedance rezistoru a induktoru.

### **Příklad 16.3.**

*Vypočítané okamžité hodnoty zobrazte ve virtuální laboratoři.*



#### **Řešení:**

Zadáme hodnoty do virtuální laboratoře, s tím že si ještě musíme zvolit číselnou hodnotu úhlové rychlosti respektive kmitočtu, zvolíme hodnotu např.  $f = 50 \text{ Hz}$ .

Průběhy jsou uvedeny v obr. 14.2 až obr. 14.3.



### **Shrnutí pojmů 16.1.**

V lineárních obvodech se střídavými neharmonickými průběhy proudů a napětí sečítáme jejich okamžité hodnoty algebraicky a jejich integrální (efektivní) hodnoty geometricky. Okamžité hodnoty výkonů sečítáme rovněž algebraicky a jejich integrální hodnoty definujeme součiny integrálních hodnot příslušných proudů a napětí. Imitanci definujeme podílem výkonu a výkonu obvodového prvku s jednotkovou hodnotou odporu nebo vodivosti rezistoru, imitance tak udává kolikrát je výkon daného prvku větší než výkon rezistoru s jednotkovou hodnotou vodivosti nebo odporu.



### **Otázky 16.1.**

1. Uveďte způsob součtu okamžitých hodnot proudu, napětí a výkonu.
2. Napište výraz pro algebraický součet okamžitých hodnot jednotlivých harmonických proudů a napětí.
3. Uveďte způsob součtu efektivních hodnot proudu a napětí.
4. Napište výraz pro geometrický součet efektivních hodnot harmonických proudů a napětí.

5. Napište výraz pro výpočet integrálních hodnot výkonů.

6. Vymezte způsob výpočtu imitancí.



### Úlohy k řešení 16.1.

1. Nakreslete duální schéma zapojení vůči obr. 16.1.
2. Vyznačte v něm počítací šipky napětí a proudu.
3. Napište příslušné rovnice pro okamžité a integrální hodnoty napětí, proudu a výkonů.
4. Zvolte si stejné číselné hodnoty obvodových parametrů jako v řešeném příkladě.
5. Sestavte příslušné rovnice s číselnými hodnotami.



### KLÍČ K ŘEŠENÍ

Postupujte podle řešeného příkladu.



### TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, článek 8.4



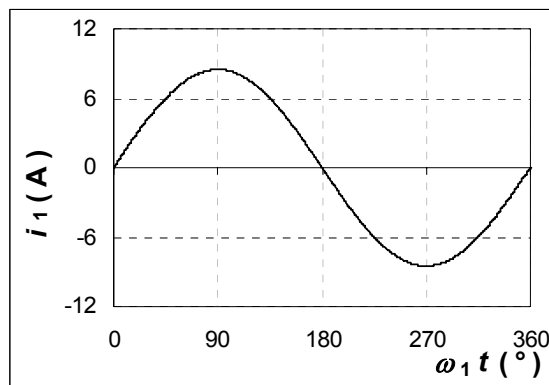
### Studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 9.3

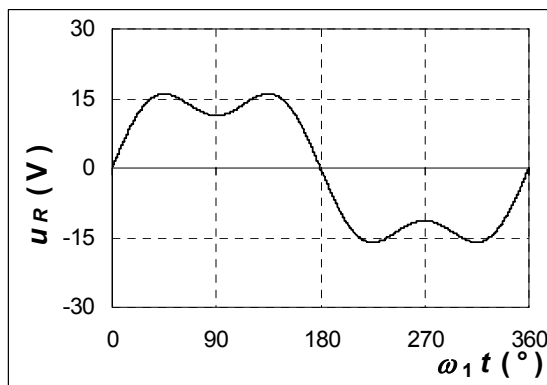


### Zadání samostatné práce

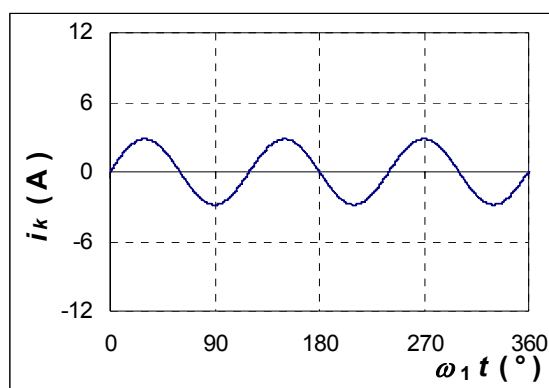
Ve virtuální laboratoři zadejte analýzu sériového zapojení rezistoru a kapacitoru napájeného střídavým neharmonickým zdrojem napětí. Pro zvolené hodnoty parametrů zobrazte okamžité hodnoty napětí, proudu a výkonu a charakterizujte je jejich integrálními hodnotami.



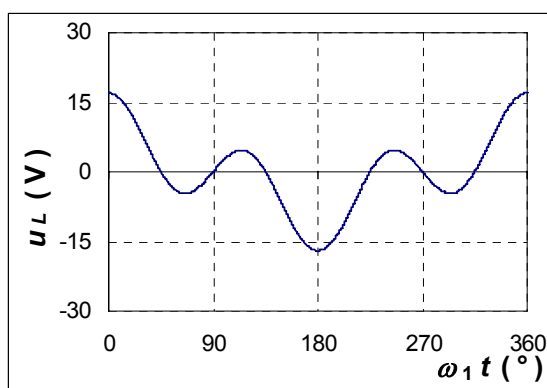
a) 1. harmonická proudu,  $I_1 = 6 \text{ A}$  ;



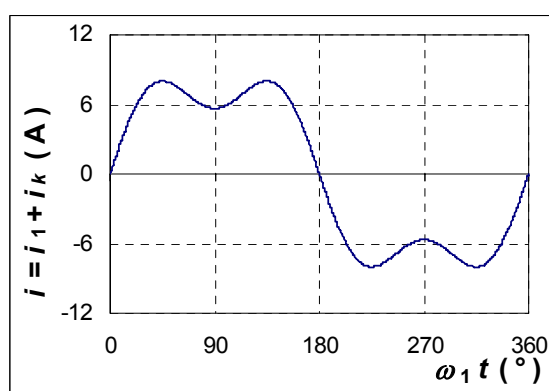
a) napětí rezistoru,  $U_R \doteq 12,6 \text{ V}$  ;



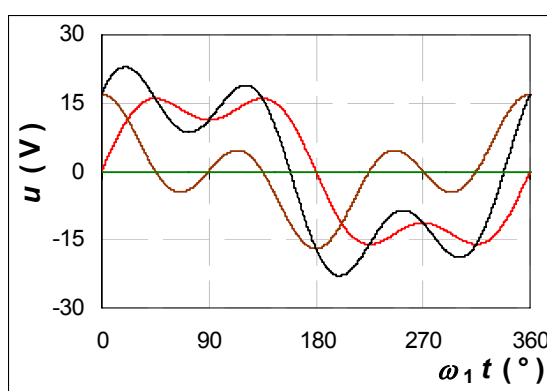
b) 3. harmonická proudů,  $I_3 = 2 \text{ A}$  ;



b) napětí induktoru,  $U_L \doteq 8,49 \text{ V}$  ;



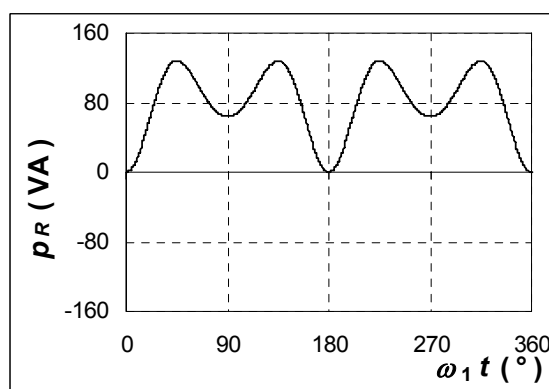
c) proud zdroje,  $I \doteq 6,32 \text{ A}$  ;



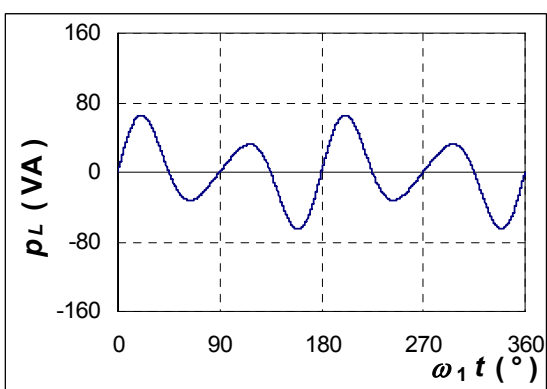
c) napětí zdroje  $U \doteq 15,2 \text{ V}$  , rezistoru a induktoru

**Obr. 2** Proud a jeho složky.

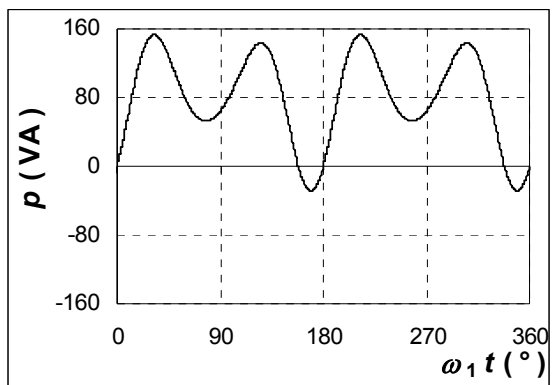
**Obr. 3** Napětí a jeho složky.



a) výkon rezistoru,  $P_R = 80 \text{ W}$  ;



b) výkon induktoru,  $P_L \doteq 53,7 \text{ var}$  ;



c) výkon zdroje,  $P \doteq 96,3 \text{ VA}$

*Obr. 16. 4 Výkon a jeho složky.*



## VIRTUÁLNÍ LABORATOŘE

Doplňující virtuální laboratoře:

16\_1\_Neharm\_napajeni\_RLD.xls

16\_2\_Neharm\_napajeni\_GKC.xls

## 17. ŠÍŘKA PÁSMÁ



**Čas ke studiu:** 1 hodina



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat šířku pásma sériového rezonančního obvodu,
- určit činitel jakosti pomocí obvodových parametrů,
- rozlišit mezní kmitočty šířky pásma,
- odvodit výrazy pro výpočet mezních kmitočtů,
- posoudit kvalitu sériového rezonančního obvodu,
- aplikovat virtuální laboratoř pro zadání a analýzu rezonančního obvodu,
- zobrazit frekvenční charakteristiky veličin.

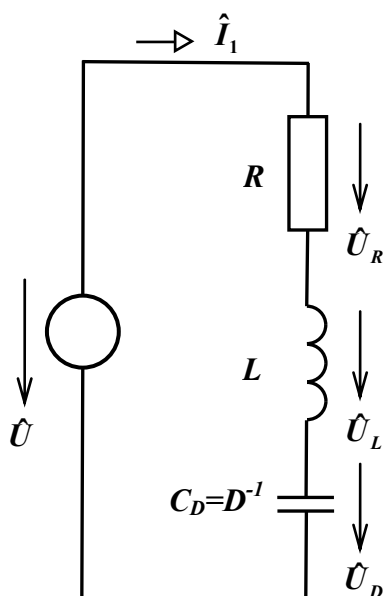
### 17.1. Definice šířky pásma



#### VÝKLAD

V sériovém rezonančním obvodu na obr. 17-1 šířku pásma stanovíme z výrazu

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q_0} = \frac{R}{2\pi L} .$$



**Obr. 17.1** Sériový rezonanční obvod.

Šířku pásma definujeme v modulových frekvenčních charakteristikách poklesem činného výkonu na hodnotu poloviny maximální hodnoty činného výkonu rozdílem mezních kmitočtů, na kterých k těmto poklesům dochází. V modulových charakteristikách efektivních hodnot proudu nebo napětí šířku pásma vymezujeme poklesem o 3 dB, respektive na hodnotu 70,7 % maximální hodnoty. V případech kdy můžeme jednoznačně vymezit fázovou frekvenční charakteristiku proudu obr. 2, jsou mezní kmitočty definovány úhly  $\pm 45^\circ$  elektrických.

### Příklad 17.1.

Odvod'te výraz pro výpočet šířky pásma sériového rezonančního obvodu.



### Řešení:

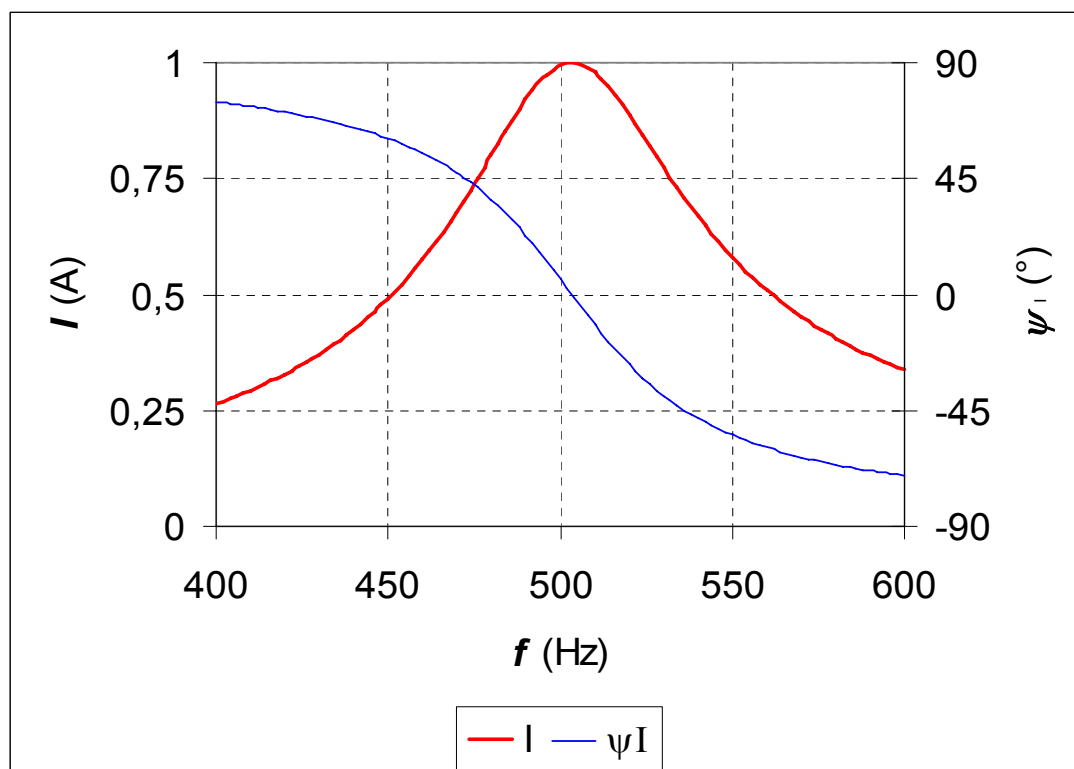
Nejdříve určíme rezonanční kmitočet z podmínky

$$\text{Im}\{\hat{Z}(\omega)\} = 0 \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C_D} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_D}}, \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

a potom odvodíme výraz pro činitel jakosti

$$Q_0 = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{U_L}{U_R} = \frac{\omega_0 L \cdot I}{R \cdot I} = \frac{L}{R \sqrt{LC_D}} = \frac{\sqrt{L}}{R \sqrt{C_D}} = \frac{\rho}{R},$$

kde  $\rho$  je charakteristický odpor.



**Obr. 17.2** Modulová a fázová frekvenční charakteristika proudu sériového rezonančního obvodu napájeného zdrojem konstantního napětí.

Šířku pásma pak definujeme výrazem

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q_0} = \frac{1}{\frac{2\pi\sqrt{LC}}{\sqrt{L}} \cdot \frac{R}{R\sqrt{C}}} = \frac{R}{2\pi L}.$$

Tento výraz neumožňuje stanovit mezní kmitočty šířky pásma.

### **Příklad 17.2.**

*Odvod'te výrazy pro výpočet mezních kmitočtů šířky pásma sériového rezonančního obvodu.*



#### **Řešení:**

Šířku pásma stanovíme rozdílem mezních kmitočtů

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q_0} = f_a - f_b.$$

Výrazy pro mezní kmitočty  $f_a$  a  $f_b$  odvodíme z fáze impedance

$$\varphi_Z = \psi_U - \psi_I,$$

pro  $\psi_U = 0$  je  $\varphi_Z = -\psi_I$ ,

přičemž

$$\varphi_Z(\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} \{\hat{Z}(\omega)\}}{\operatorname{Re} \{\hat{Z}(\omega)\}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C_D}}{R}.$$

Z hodnot  $\varphi_Z(\omega) = \mp 45^\circ$

stanovíme hodnotu argumentu

$$\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \mp 1,$$

předchozí rovnici upravíme do tvaru

$$\omega^2 LC \pm \omega RC - 1 = 0$$

a z ní pro

$$\varphi_Z(\omega) = +45^\circ$$

stanovíme výraz pro mezní kmitočty

$$f_a = \frac{1}{2\pi} \left[ \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC_D}} + \frac{R}{2L} \right] = \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{2}\right)^2 + f_0^2} + \frac{\Delta f}{2},$$

a pro

$$\varphi_Z(\omega) = -45^\circ$$

výraz pro mezní kmitočty

$$f_b = \frac{1}{2\pi} \left[ \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC_D}} - \frac{R}{2L} \right] = \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{2}\right)^2 + f_0^2} - \frac{\Delta f}{2}.$$

**Shrnutí pojmů 17.1.**

Šířku pásma definujeme poklesem činného výkonu na polovinu maximální hodnoty. V lineárním sériovém rezonančním obvodu výrazy pro šířku pásma a mezní kmitočty odvodíme z frekvenční charakteristiky impedance, respektive proudu.

**Otázky 17.1.**

1. Napište výraz pro šířku pásma definovaného rezonančním kmitočtem a činitelem jakosti.
2. Formulujte slovně vztah mezi šířkou pásma a činitelem jakosti.
3. Napište výraz pro definici šířky pásma z mezních kmitočtů.
4. Formulujte slovně postup odvození výrazu pro stanovení šířky pásma z rezonančního kmitočtu a činitele jakosti.
5. Formulujte slovně postup odvození pro stanovení mezních kmitočtů.
6. Uvažte, zda je možné jednoznačně vymezit šířku pásma pomocí parametrů sériového rezonančního obvodu.

**Úlohy k řešení 17.1.**

1. Nakreslete duální schéma zapojení vůči obr. 17.1.
2. Vyznačte v něm počítací šipky napětí a proudu.
3. Napište příslušné rovnice pro okamžité a integrální hodnoty napětí, proudu a výkonů.
4. Zvolte si stejné číselné hodnoty obvodových parametrů jako v řešeném příkladě.
5. Sestavte příslušné rovnice s číselnými hodnotami.

**KLÍČ K ŘEŠENÍ**

Postupujte podle odvozených výrazů.

**TEXT K PROSTUDOVÁNÍ**

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, článek 8.4

**Studijní texty**

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 5.5

**Zadání samostatné práce**

Vypočítejte šířku pásma a mezní kmitočty v sériovém rezonančním obvodu pro hodnoty parametrů, které si zvolíte.

## 18. EXTRÉMY NAPĚTÍ INDUKTORU A KAPACITORU V SÉRIOVÉM REZONANČNÍM OBVODU



**Čas ke studiu:** 1 hodina



**Cíl:** Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- rozlišit extrémy napětí induktoru a kapacitoru,
- odvodit výrazy pro výpočet úhlových rychlostí extrémů napětí induktoru a kapacitoru,
- definovat rezonanční kmitočet geometrickým průměrem kmitočty extrémů,
- posoudit hodnoty extrémních kmitočtů,
- odvodit podmínku, při níž extrémy napětí nenastanou,
- aplikovat virtuální laboratoř pro zadání a analýzu obvodů,
- zobrazit neharmonické průběhy veličin.

### 18.1. Úvaha



#### VÝKLAD

V sériovém rezonančním obvodu na obr. 18.1 při napájení zdrojem harmonického napětí, jehož efektivní hodnota není funkcí úhlové rychlosti  $\omega$ , tj.

$$U(\omega) = U = \text{konst.}$$

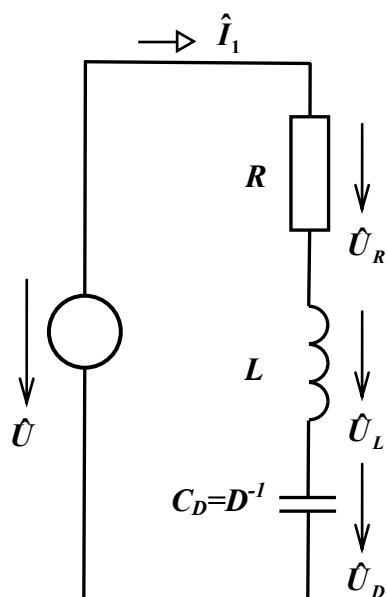
dochází ve frekvenční charakteristice proudu  $I(\omega)$  (obr. 18.2) na rezonančním kmitočtu k maximu (extrému). Zabývejme se tím, zda nastává extrém i ve frekvenční charakteristice efektivní hodnoty napětí induktoru

$$U_L(\omega) = I(\omega) \cdot \omega L,$$

což znamená vynásobení rezonanční charakteristiky rovnici přímky, a zda nastává extrém i ve frekvenční charakteristice efektivní hodnoty napětí kapacitoru

$$U_D(\omega) = I(\omega) \cdot \frac{D}{\omega},$$

což není nic jiného než vynásobení rezonanční charakteristiky rovnici hyperboly.



**Obr. 18.1** Sériový rezonanční obvod.

#### □ Extrémy napětí induktoru a kapacitoru

Z odvození vyplývá, že extrém napětí induktoru nastane pro

$$\omega_L = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2Q_0^2}{2Q_0^2 - 1}},$$

extrém napětí kapacitoru pro

$$\omega_D = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2Q_0^2 - 1}{2Q_0^2}},$$

z čehož je zřejmé, že

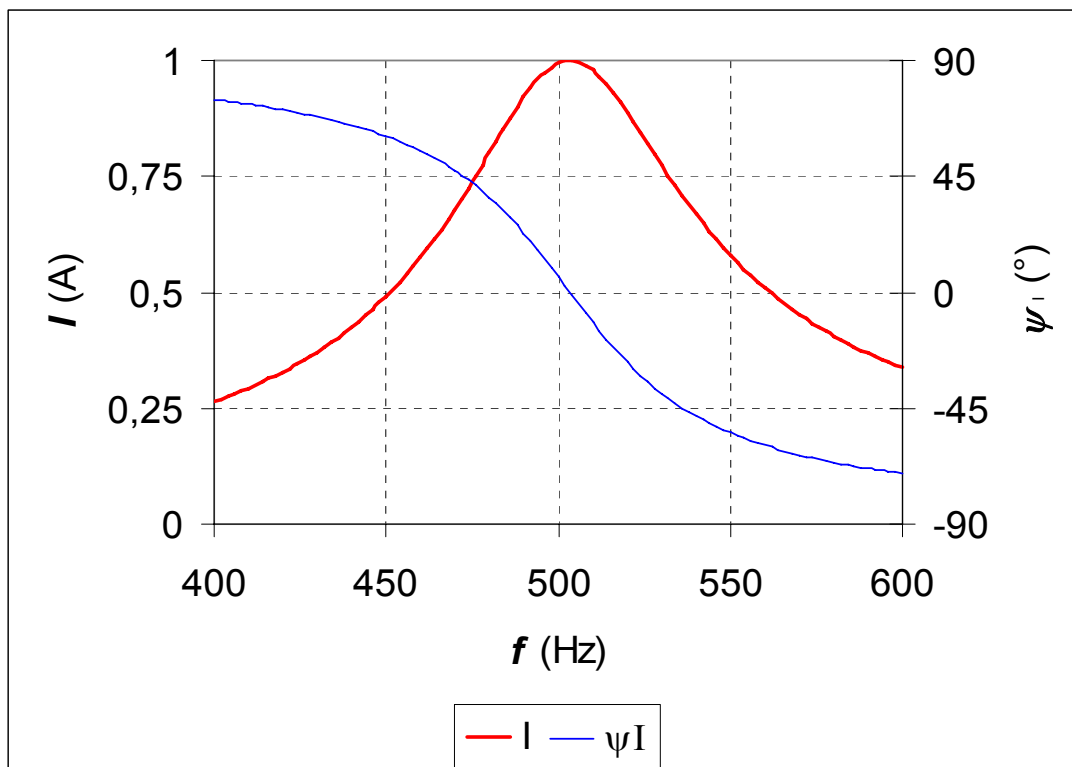
$$\omega_L \omega_D = \omega_0^2$$

kde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{L}}, \quad Q_0 = \sqrt{\frac{LD}{R^2}}.$$

Z rozboru pak vyplývá, že extrémy nenastanou, když

$$2Q_0^2 - 1 < 0, \text{ tj. } Q_0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 0,707$$



**Obr. 18.2** Modulová a fázová frekvenční charakteristika proudu sériového rezonančního obvodu napájeného zdrojem konstantního napětí.

### Příklad 18.1.

Odvoďte výrazy pro úhlové rychlosti, při nichž nastávají extrémy napětí induktoru a kapacitoru.



#### Řešení:

Při odvození vyjdeme z absolutní hodnoty impedance obvodu na obr. 18.1

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{D}{\omega}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega^2 L^2 - 2LD + \frac{D^2}{\omega^2})} = \left[ R^2 + (\omega^2 L^2 - 2LD + \frac{D^2}{\omega^2}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

a určíme její první derivaci podle úhlového kmitočtu

$$\frac{dZ(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2} \frac{2\omega L^2 - 2\omega^{-3} D^2}{\left[ R^2 + (\omega^2 L^2 - 2LD + \frac{D^2}{\omega^2}) \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\omega L^2 - 2\omega^{-3} D^2}{2Z(\omega)} = \frac{a}{2Z(\omega)} = Z'(\omega) .$$

Předpokládáme, že efektivní hodnota napětí zdroje není funkcí úhlové rychlosti

$$U(\omega) = U = konst. ,$$

pak absolutní hodnota proudu

$$I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)}$$

a absolutní hodnota napětí induktoru

$$U_L(\omega) = \omega L \cdot I(\omega) = U \cdot \frac{\omega L}{Z(\omega)}$$

Pro nalezení extrému derivujeme podíl funkcí

$$\frac{u}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

kde v daném případě

$$u = \omega L, \quad v = Z(\omega), \quad u' = L \quad \text{a} \quad v' = Z'(\omega).$$

Potom

$$\frac{dU_L(\omega)}{d\omega} = U \frac{LZ(\omega) - \omega L \cdot Z'(\omega)}{Z^2(\omega)} = U \frac{LZ(\omega) - \frac{\omega L \cdot a}{2Z(\omega)}}{Z^2(\omega)} = U \frac{\frac{2LZ^2(\omega) - \omega L \cdot a}{2Z(\omega)}}{Z^2(\omega)} = U \frac{2LZ^2(\omega) - \omega L \cdot a}{2Z^3(\omega)}$$

Extrém nastane pro

$$\frac{dU_L(\omega)}{d\omega} = 0.$$

Jelikož se evidentně jedná o maximum, nemusíme určovat druhou derivaci, tj.

$$2LZ^2(\omega) - \omega L \cdot a = 0 \quad \text{respektive} \quad 2u'Z^2(\omega) - u \cdot a = 0$$

$$2L(R^2 + \omega^2 L^2 - 2LD + \frac{D^2}{\omega^2}) - \omega L(2\omega L^2 - 2\omega^{-3}D^2) = 0 \quad / \cdot \frac{1}{2L}$$

$$R^2 + \omega^2 L^2 - 2LD + \frac{D^2}{\omega^2} - \omega^2 L^2 + \frac{D^2}{\omega^2} = 0 \quad / \cdot \omega^2$$

$$\omega^2(R^2 - 2LD) + 2D^2 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{2D^2}{2LD - R^2} = \frac{D}{L} \frac{2D}{2D - \frac{R^2}{L}} = \omega_0^2 \frac{2D}{2D - \frac{R^2}{L}} = \omega_0^2 \frac{2}{2 - \frac{R^2}{LD}} = \omega_0^2 \frac{2}{2 - \frac{1}{Q_0^2}} = \omega_0^2 \frac{2Q_0^2}{2Q_0^2 - 1} = \omega_L^2.$$

$$\underline{\underline{\omega_L = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2Q_0^2}{2Q_0^2 - 1}}.}}$$

Stručně-pro nalezení extrému napětí kapacitoru vede řešení

$$\frac{dU_D(\omega)}{d\omega} = 0.$$

k aplikaci vyjádření (X)  $2u'Z^2(\omega) - u \cdot a = 0$  pro extrém napětí induktoru, přičemž

$$u = \frac{D}{\omega}, \quad u' = -\frac{D}{\omega^2}, \quad 2\omega L^2 - 2\omega^{-3}D^2 = a.$$

Potom

$$2\left(-\frac{D}{\omega^2}\right) \cdot \left(R^2 + \omega^2 L^2 - 2LD + \frac{D^2}{\omega^2}\right) - \frac{D}{\omega} \cdot \left(2\omega L^2 - 2\frac{D^2}{\omega^3}\right) = 0 \quad / \cdot \frac{1}{2D}$$

$$-\frac{R^2}{\omega^2} - L^2 + \frac{2LD}{\omega^2} - \frac{D^2}{\omega^4} - L^2 + \frac{D^2}{\omega^4} = 0 \quad / \cdot (-\omega^2)$$

$$2\omega^2 L^2 = 2LD - R^2$$

$$\omega^2 = \frac{2LD - R^2}{2L^2} = \frac{D}{L} \frac{2L - R^2 D^{-1}}{2L} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{R^2}{2LD}\right) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2}\right) = \omega_0^2 \frac{2Q_0^2 - 1}{2Q_0^2} = \omega_D^2$$

$$\omega_D = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2Q_0^2 - 1}{2Q_0^2}}.$$

### Příklad 18.2.

Stanovte geometrický průměr úhlových rychlostí, při nichž nastávají extrémy napětí induktoru a kapacitoru.



**Řešení:**

Součin úhlových rychlostí, při nichž nastávají extrémy napětí induktoru a kapacitoru, je roven druhé mocnině rezonanční úhlové rychlosti

$$\omega_L \cdot \omega_D = \omega_0^2,$$

to znamená, že jejich geometrický průměr je roven rezonanční úhlové rychlosti obvodu

$$\sqrt{\omega_L \cdot \omega_D} = \omega_0.$$

### Příklad 18.3.

Porovnejte hodnoty úhlových rychlostí  $\omega_L$  a  $\omega_D$ .



**Řešení:**

Hodnoty úhlových rychlostí porovnáme podílem

$$\frac{\omega_L}{\omega_D} = \frac{\omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2Q_0^2}{2Q_0^2 - 1}}}{\omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2Q_0^2 - 1}{2Q_0^2}}} = \frac{2Q_0^2}{2Q_0^2 - 1},$$

z něhož vyplývá, že hodnota úhlové rychlosti  $\omega_L$  je větší než hodnota úhlové rychlosti  $\omega_D$ , protože hodnota výrazu v čitateli je vždy větší než hodnota výrazu ve jmenovateli

$$2Q_0^2 > 2Q_0^2 - 1.$$

### Příklad 18.4.

Porovnejte hodnoty úhlových rychlostí  $\omega_L$ ,  $\omega_D$  s hodnotou úhlové rychlosti  $\omega_0$ .



**Řešení:**

Z podílů

$$\frac{\omega_L}{\omega_0} = \sqrt{\frac{2Q_0^2}{2Q_0^2 - 1}} \quad \text{a} \quad \frac{\omega_D}{\omega_0} = \sqrt{\frac{2Q_0^2 - 1}{2Q_0^2}}$$

je zřejmé, že s rostoucí hodnotou činitele jakosti se hodnoty obou úhlových rychlostí blíží hodnotě rezonančního kmitočtu.

**Příklad 18.5.**

Posuďte, zda existují podmínky, při nichž nenastanou extrémy napětí induktoru a kapacitoru.



**Řešení:**

Oba výrazy pro extrémní hodnoty napětí obsahují člen

$$2Q_0^2 - 1,$$

je-li jeho hodnota záporná, nemohou extrémy fyzikálně nastat

$$2Q_0^2 - 1 < 0,$$

tj.

$$Q_0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 0,707.$$

Extrémy napětí induktoru a kapacitoru nemohou nastat při hodnotě činitele jakosti menší jak 0,707.



**Shrnutí pojmů 18.1.**

V sériovém rezonančním obvodu nastanou extrémy napětí induktoru a kapacitoru pouze při hodnotě činitele jakosti větší jak 0,707. Extrém napětí induktoru nastává na kmitočtu menším, než je rezonanční a extrém napětí kapacitoru na kmitočtu větším, než je rezonanční kmitočet. Geometrický průměr obou kmitočtů je vždy roven rezonančnímu kmitočtu.



**Otázky 18.1.**

1. Rozhodněte, zda extrém napětí kapacitoru nastává před nebo po rezonančním kmitočtu.
2. Rozhodněte, zda extrém napětí induktoru nastává před nebo po rezonančním kmitočtu.
3. Formulujte slovně podmínku, při níž extrémy napětí nenastanou.
4. Napište výraz pro geometrický průměr kmitočtu extrému napětí induktoru a kapacitoru.
5. Napište výraz pro rezonanční úhlovou rychlost sériového rezonančního obvodu.
6. Napište výraz pro činitel jakosti sériového rezonančního obvodu.

7. Vymezte výrazy pro hodnoty úhlových rychlostí extrémních napětí induktoru a kapacitoru z rezonanční úhlové rychlosti a činitele jakosti.



### Úlohy k řešení 18.1.

1. Nakreslete schéma zapojení sériového rezonančního obvodu.
2. Vyznačte v něm počítací šipky napětí a proudu.
3. Vypočítejte hodnoty kmitočtů, na kterých nastávají extrémy napětí pro hodnoty obvodových parametrů:  $R = 4 \Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C_D = 10 \mu\text{F}$ .
4. Stanovte hodnotu odporu tak, aby nenastaly extrémy napětí v sériovém rezonančním obvodu při  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C_D = 10 \mu\text{F}$ .



### KLÍČ K ŘEŠENÍ

Postupujte podle odvozených výrazů.



### TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

[1] Mikulec, M., Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů I. Skriptum ČVUT Praha 2003, článek 7.10



### Studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 5.5



### Zadání samostatné práce

Vypočítejte hodnoty extrémních kmitočtů a extrémních napětí induktoru a kapacitoru v sériovém rezonančním obvodu s parametry, které si zvolíte.



### VIDEO

Doplňující videa:

18\_1\_Paralelni\_rezonance.wmv

18\_2\_Paralelni\_zapojeni\_GKC.wmv

18\_3\_Seriova\_rezonance.wmv

18\_4\_Seriove\_zapojeni\_RLD.wmv